COINSPIRAÇÃO
Revista dos Professores que Ensinam Matemática

A mais bela de todas as fórmulas em uma abordagem por meio dos Números Complexos

Thiago Beirigo Lopes[1]
Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT)

Ademir Brandão Costa[2]
Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC/PA)

Ritianne de Fátima Silva de Oliveira[3]
Secretaria Municipal de Educação de Canaã dos Carajás/PA (SEMED-CC)

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de apresentar em ordem histórica o surgimento dos números complexos até à mais bela de todas as fórmulas. Com o intuito de levar o leitor a percebê-los não apenas como se fossem símbolos matemáticos, mas como números com os quais se chega a respostas reais de problemas concretos. Como por exemplo, a resolução de equações do 3º grau, pelo método de Cardano-Tartaglia, onde ao fazer a tentativa de descobrir as soluções de uma dessas equações, eles se defrontaram com a raiz quadrada de um número negativo, porém por uma análise prévia descobriram que a equação possuía soluções. E este é o motivo para que possamos adotar esse tipo de resolução, desde que suponhamos a existência da raiz quadrada de um número negativo. Assim, esse artigo mostra o estabelecimento da existência das raízes quadradas de números negativos, denominados números complexos, uma breve explanação sobre a exponencial complexa e as discussões entre Jean Bernoulli e Leibniz sobre o tratamento de logaritmos de quantidades negativas, expressando alguns cálculos e argumentos de ambos. Iremos também abordar a contribuição de Leonhard Euler que chegou a uma definição espantosa onde não houve uma definição entre o certo e o errado. E finalmente apresentamos, o que na opinião de Euller, é a mais bela de todas as fórmulas, que encanta por sua simplicidade e seu desenvolvimento histórico.

Palavras-chave: Matemática; História da matemática; Números Complexos; Exponencial Complexa.

The most beautiful of all formulas in an approach through Complex Numbers

ABSTRACT

This work aims to present in historical order the emergence of complex numbers to the most beautiful of all formulas. To lead the reader to perceive them not only as if they were mathematical symbols, but as numbers with which to arrive at real answers to concrete problems. As for example, solving third degree equations, by the Cardano-Tartaglia method, where when trying to find the solutions of one of these equations, they were faced with the square root of a negative number, but by a previous analysis found that the equation had solutions. And this is

[1] Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática (UFMT). Professor no Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT), Confresa, Mato Grosso, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Vilmar Fernandes, 300, Bairro Santa Luzia, Confresa, Mato Grosso, Brasil, CEP: 78.652-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9409-6140. Lattes: http://lattes.cnpq.br/6989605096245375. E-mail: thiago.lopes@ifmt.edu.br.

[2] Mestre em Educação (UFT). Professor na Secretaria de Educação do Estado do Pará (SEDUC/PA), Canaã dos Carajás, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Tocantins, 19, bairro Vale dos Sonhos, Canaã dos Carajás, Pará, Brasil, CEP: 68537-000. ORCID: http://orcid.org/0000-0000-0000-0000. Lattes: http://lattes.cnpq.br/1509257036481355. E-mail: ademirbrandao@gmail.com.

[3] Mestra em Educação pela Universidade Federal do Tocantins (UFT). Professora da educação básica da Rede Municipal de Ensino de Canaã dos Carajás, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Itamarati, Bairro Novo Horizonte, Canaã dos Carajás, Pará, Brasil, CEP: 68.537-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6928-6348. Lattes: http://lattes.cnpq.br/4325980767160473. E-mail: ritianne@semedcanaadoscarajas.pa.gov.br.

why we can adopt this kind of resolution, if we suppose the existence of the square root of a negative number. Thus, this article shows the establishment of the existence of the square roots of negative numbers, called complex numbers, a brief explanation about the complex exponential and the discussions between Jean Bernoulli and Leibniz about the treatment of logarithms of negative quantities, expressing some calculations and arguments of both. We will also address the contribution of Leonhard Euler who arrived at an amazing definition where there was no definition between right and wrong. And finally, we present the most beautiful of all formulas, which enchants for its simplicity and its historical development.
Keywords: Mathematics; History of Mathematics; Complex Numbers; Exponential Complex.

La más bella de todas las fórmulas en un enfoque a través de los Números Complejos

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo presentar en orden histórico el surgimiento de los números complejos hasta la más bella de todas las fórmulas. Con el propósito de hacer que el lector los perciba no solo como si fueran símbolos matemáticos, sino como números con los que se llega a respuestas reales a problemas concretos. Como, por ejemplo, la resolución de ecuaciones de tercer grado, por el método de Cardano-Tartaglia, donde al intentar encontrar las soluciones de una de estas ecuaciones, se encontraron con la raíz cuadrada de un número negativo, pero por un análisis previo descubrieron que la ecuación tenía soluciones. Y este es el motivo por el que podemos adoptar este tipo de resolución, siempre que supongamos la existencia de la raíz cuadrada de un número negativo. Así, este artículo muestra el establecimiento de la existencia de las raíces cuadradas de números negativos, denominados números complejos, una breve explicación sobre la exponencial compleja y las discusiones entre Jean Bernoulli y Leibniz sobre el tratamiento de logaritmos de cantidades negativas, expresando algunos cálculos y argumentos de ambos. También abordaremos la contribución de Leonhard Euler, quien llegó a una definición asombrosa donde no hubo una definición entre lo correcto y lo incorrecto. Y finalmente presentamos, lo que, en la opinión de Euler, es la más bella de todas las fórmulas, que encanta por su simplicidad y su desarrollo histórico.
Palabras clave: Matemáticas; Historia de las matemáticas; Números complejos; Exponencial compleja.

INTRODUÇÃO (ou CONSIDERAÇÕES INICIAIS)

Os números complexos possuem uma grande diversidade de aplicações servindo como base para áreas das ciências exatas, engenharia, física, na tecnologia contemporânea, como por exemplo, no estudo e representação de circuitos elétricos e suas propriedades. A aplicação do conjunto de números complexos estende-se também a outras áreas da própria matemática, como por exemplo sua aplicação na álgebra dos vetores. Este artigo destaca a importância do conhecimento dos números complexos, explorando sua origem, conceito, história e sua relação com exponenciais complexas.

Através do levantamento histórico veremos que o surgimento dos números complexos está intimamente ligado a resolução de equações, sobretudo as equações de grau 3, e não as de grau 2. Também vamos aprender que sua aceitação, compreensão e utilização ocorreu de forma lenta e gradual.

Esse trabalho se inicia com um breve histórico sobre o desenvolvimento dos números complexos, destacando os constantes afrontamentos dos matemáticos da época, que alcançaram as raízes quadradas de números negativos e mostraram alguns cálculos e situações, devidamente referenciados ou feitos pelo autor, para ampliar e melhorar a compreensão do leitor.

Perpassa sobre as equações cúbicas e a, então evidente, legitimidade dos números complexos, mostrando alguns empecilhos transpassados para reconhecimento de tal legitimidade. Prosseguindo com a interpretação geométrica idealizada semelhantemente e paralelamente por Caspar Wessel (1745-1818), Jean-Robert Argand (1786-1822) e K. F. Gauss (1777-1855).

Finalizamos esse trabalho falando sobre a exponencial complexa e as discussões entre Jean Bernoulli (1667-1748) e Leibniz (1646-1717) sobre o tratamento de logaritmo de quantidades negativas, expressando alguns cálculos e argumentos de ambos. Com a contribuição de Leonhard Euler (1707-1783) chega-se a uma definição espantosa onde não houve um certo ou um errado. E, por fim, apresentamos a mais bela de todas as fórmulas, que encanta por sua simplicidade e seu contexto histórico.

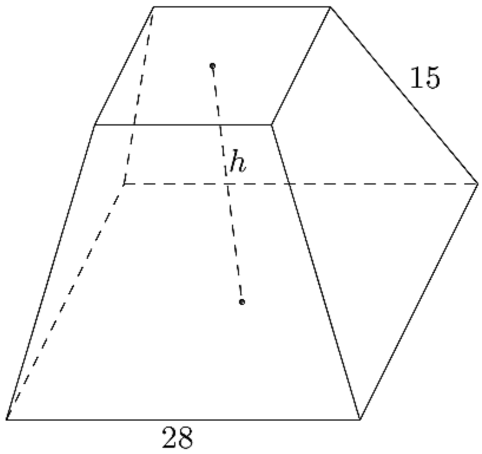
HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Na matemática, tudo possui uma base firme e sólida. Não se trata de um conteúdo simplesmente estudado porque alguém "inventou", como no caso dos números complexos $a + b.i$, e definiu as operações de maneira aleatória e sem propósito. É essencial pesquisar a história dos números complexos para compreender sua verdadeira origem, o motivo de sua evolução e estabelecer uma fundação robusta que facilite a compreensão de suas operações e aplicações.

A difícil anuência da existência da raíz quadrada de números negativos

O primeiro vestígio conhecido de raiz quadrada de número negativo na história da matemática localiza-se na obra "*Stereometria*", do grego Herão de Alexandria (aproximadamente 50 a.C a 50 d.C) (IEZZI *et al.*, 2004). Ao que parece Herão não escreveu especificamente sobre aritmética, porém os seus escritos são muito relevantes para se apreciar o modo como os gregos se amparavam nas operações do cálculo cotidiano. O que diz respeito à extração da raiz quadrada, muitos consideram este um cálculo complexo e pouco prático. No entanto, para os gregos, a metodologia de extração de raízes era um ensinamento comum. Em um dos seus registros, ao determinar a altura de um tronco de pirâmide com base quadrada, onde o lado da base maior mede 28, o da menor 4 e a aresta lateral 15, o autor chega corretamente ao resultado $\sqrt{-63}$ (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**). O que significa que o problema não tinha resolução para a época, mas, desastradamente, ele converteu essa raiz em $\sqrt{63}$.

Figura 1 - Tronco de pirâmide idealizado por Herão



Fonte: Elaborado pelos autores.

Aproximadamente dois séculos depois, o também grego Diofanto de Alexandria (aprox. 200 – 284 d.C), conhecido popularmente como o "Pai da Álgebra" por fazer a primeira utilização sistemática de símbolos algébricos e cuja vida é uma incógnita, incluiu na sua obra "*Arithmetica*", uma coleção de 130 problemas dando soluções numéricas a equações determinadas e indeterminadas, o seguinte problema: achar os lados de um triângulo retângulo cuja área é 7 e o perímetro é 12. Dentro de seu estilo de resolução, Diofanto indicou os catetos por expressões análogas, na simbologia atual, a 1/x e 14x. Chegando, então, à equação $-336x^2 + 172x = 24$, que concluiu não ter raízes (IEZZI, 2013)

Em meados do século IX, o matemático hindu Mahavira universalizou a conclusão de Diofanto: "Tal como na natureza das coisas, uma quantidade negativa não é um quadrado e, portanto, não tem raiz quadrada" (IEZZI *et al.,* 2004). Muitos longos séculos se passariam até que essa afirmativa fosse repensada.

O auge das cúbicas e a legitimidade dos complexos

Seria impraticável falar da gênese dos números complexos e não comentar das cúbicas, que são as equações cujo grau é 3. Em meados do século XVI, dá-se início o descobrimento da solução das equações cúbicas, então surgiram questionamentos que envolviam raízes quadradas de números negativos e agora não podiam mais serem evitados alegando um simples "não existe solução". Então entrava em cena G. Cardano (1501-1576), nascido na cidade de Pavia, na Itália, homem de muitos interesses, publicou em 1545 o trabalho matemático pelo qual ele é mais conhecido atualmente, "*Ars Magna*" (A Grande Arte). Essa obra tem como enfoco as múltiplas formas de equações de grau três e suas respectivas soluções e onde se adianta ao descobrimento dos números complexos, sendo o matemático precursor em publicar essa solução, também foi o primeiro a operar com esses números, nessa mesma obra, embora em um único problema somente (BOYER, 2012). O problema consistia no caso de alguém buscar dividir o número 10 em duas partes, de modo que o seu produto seja 40, verificará que isto é impossível.

Então tendo obtido as raízes $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$, como solução de $x.(x - 10) = 40$, que é uma equação do segundo grau, Cardano afirmou: Pondo de lado as torturas mentais envolvidas, multiplique $5 + \sqrt{-15}$ por $5 - \sqrt{-15}$; o resultado é $25 - (-15)$, que é o produto de 40 (ROQUE; CARVALHO, 2012). Meio constrangido por não ter como decifrá-la e ao mesmo tempo obrigado a acatar essa solução, comentou que a matemática é tão sutil quanto inútil.

Mas, uma nova e interessante questão envolvendo raízes negativas passou despercebida por Cardano. Na resolução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, por exemplo, que tem como raiz o número 4, como é fácil verificar, a fórmula de Cardano-Tartaglia[4] chega à solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Portanto, pode-se observar que de alguma maneira essa expressão é igual a 4. Quem desenrolou esse segredo foi o algebrista bolonhês Rafael Bombelli (1530-1579). Onde em sua obra "Algebra", cita uma solução para o problema proposto por Cardano, porém, para isso, teve de recorrer às raízes de números negativos. Sua ideia, inicialmente considerada louca, consistiu em supor, brilhantemente, as parcelas da solução dada pela fórmula com números complexos conjugados, que em nossa notação equivale a $a + b.\sqrt{-1}$ e $a + b.\sqrt{-1}$.

No caso, Bombelli demonstrou de forma dedutiva que $2 + \sqrt{-121} = \left(2 + \sqrt{-1}\right)^3$. Logo $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ e, analogamente, $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$, então obteve $a = 2$ e $b = 1$, portanto uma raiz é $\left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 2 + 2 + \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = 4$, como se era esperado (LIMA *et al*., 2004). As outras duas raízes podem ser encontradas através do critério de fatoração. Logo o cálculo fica da forma $x^3 - 15x - 4 = (x - 4).(x^2 + 4x + 1) = 0$. Calculando x na equação temos $x^I = 4$ (como se é esperado), $x^{II} = -2 + \sqrt{3}$ e

[4] A demonstração não se faz necessária nesse contexto, podendo ser encontrada na obra de Gilberto Garbi (GARBI, 2010).

$x^{III} = -2 - \sqrt{3}$, perfazendo total de três raízes complexas como nos assegura o Teorema Fundamental da Álgebra (ÁVILA, 2002).

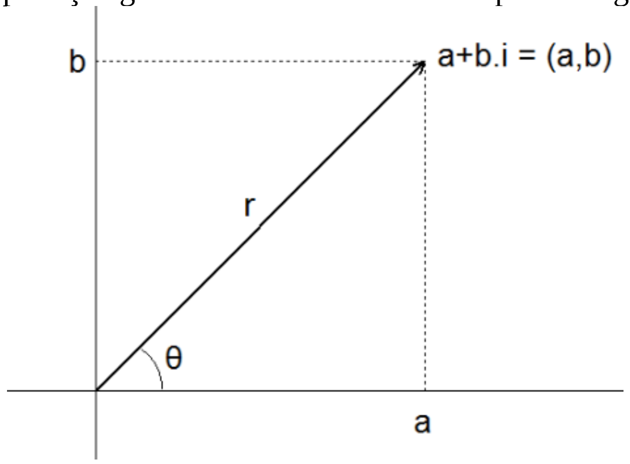
Uma nova visão sobre os complexos e sua aplicação na álgebra dos vetores

Apesar de todas as considerações já obtidas, os números complexos prosseguiram ainda tendo certo ar enigmático até o fim do século XVIII. Foi quando Caspar Wessel (1745–1818), Jean-Robert Argand (1786–1822) e K. F. Gauss (1777–1855) descobriram, independentemente entre si, que esses números admitem uma representação na geometria. Mas enquanto Gauss concebia essa representação por meio dos pontos de um plano, Wessel e Argand empregavam segmentos de reta orientados, ou seja, vetores, coplanares (IEZZI, 2013). Na realidade, Wessel e Argand escreveram trabalhos unicamente a respeito, com Wessel sendo o pioneiro na publicação, em 1799, com intenções análogas. Já Gauss, apenas deixou bem claro conhecer as ideias implícitas ao assunto, inclusive utilizando-as.

Esses três ilustres matemáticos se deram conta de que, além do que representar pontos ou vetores, os números complexos podem ser usados para operar algebricamente, formalizando-se assim a álgebra dos vetores de um plano.

Hoje em dia, um plano cartesiano utilizado para representar os complexos é designado plano de Argand-Gauss (Figura 2), apesar das ideias de Argand colaborarem mais para esse contexto. Argand, laborando com a ideia de rotação, considerava um número complexo $a + bi$ como combinação geométrica $\overrightarrow{OB}$ de a e $b.i$, e provia também a representação trigonométrica, ou seja, $z = r.(cos\,\theta + i.sen\,\theta)$ (EVES, 2004).

Figura 2 - Interpretação geométrica dos números complexos segundo C. Wessel



Fonte: Elaborado pelos autores.

Mas ainda havia uma questão formal a ser esclarecida: o fato da expressão algébrica $a + b.i$ de um número complexo envolver a soma das duas quantidades a e bi, de espécies plenamente distintas. O irlandês Sir William R. Hamilton (1805-1865), elucidaria o assunto. Foi numa conversação à Academia Irlandesa, em 1833, que tornou pública seu modo de ver os números complexos. Por essa maneira, a estrutura dos números complexos era analisada como entes em forma de pares ordenados (a, b) de números reais e as operações de adição e multiplicação assim definidas:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Dessa definição transcorrem, espontaneamente, as propriedades algébricas aguardadas para as operações. Enfim, Hamilton conseguira transcrever os números complexos a limpo, com toda a elegância que a álgebra pode proporcionar (BOYER, 2012). Esses aportes teóricos até aqui apresentados, embasaram várias discussões sobre números complexos em outros ramos da matemática, como o cálculo de exponencial e logaritmos envolvendo tais números.

Como Euler resolveu uma discussão sobre logaritmos

Leonhard Euler (1707-1783), originário de Basiléia, Suíça, foi filho de Paul Euler, que estudou Teologia na Universidade de Basiléia e aprendeu Matemática com Jean Bernoulli (1667-1748). Euler deixou um impressionante legado de trabalhos em diversas áreas, que incluem Engenharia, Mecânica, Óptica, Astronomia, Música e Matemática. Sua produção foi tão intensa que, mesmo após sua morte, seus artigos continuaram sendo publicados. Por isso, apenas algumas das muitas contribuições de Euler para a ciência serão aqui mencionadas.

Uma de suas principais contribuições foi na área de notações gráficas. A base e, apesar de já conhecida desde a descoberta dos logaritmos, ainda não tinha uma notação padronizada. Em uma carta a Goldbach (1690-1764), em 1731, Euler mencionou o e como o número cujo logaritmo hiperbólico é 1 (BOYER, 2012).

Euler também é creditado pela adoção definitiva da letra grega π para representar a relação entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. Embora não tenha sido o primeiro a usá-la, foi o primeiro a reconhecer sua importância e utilidade. Contudo, a notação só se tornou conhecida em 1794, quando foi publicada em uma obra póstuma.

Com a adoção do símbolo i (como $\sqrt{-1}$) por Gauss em seu livro "Disquisitiones Arithmeticae", em 1801, consolidou-se o uso desse símbolo nas notações matemáticas. Além disso, a contribuição de Euler para a teoria dos logaritmos vai além da definição de expoentes, como os utilizamos hoje. Ele também se dedicou ao conceito de logaritmo de números negativos (BOYER, 2012).

No século XVIII havia uma grande questão a ser resolvida: “Como seria tratado o logaritmo de quantidades negativas?”. Nesse impasse, se destacaram as ideias dos grandes matemáticos Jean Bernoulli (1667-1748) e de Leibniz (1646-1717). Essa discussão teve início quando Bernoulli resolveu uma integral $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$ utilizando os números complexos da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+a^2} dx &= \int \frac{1}{(x+a.i).(x-a.i)} dx \\
&= \int \frac{-4a^2}{2ai(x+a.i).2ai(x-a.i)} dx \\
&= \int \frac{-4a^2}{(2aix-2a^2).(2aix+2a^2)} dx \\
&= \int \frac{-2aix-2a^2+2aix-2a^2}{(2aix-2a^2).(2aix+2a^2)} dx \\
&= \int \frac{-(2aix+2a^2)+(2aix-2a^2)}{(2aix-2a^2).(2aix+2a^2)} dx \\
&= \int \left(-\frac{1}{(2aix-2a^2)} + \frac{1}{(2aix+2a^2)}\right) dx \\
&= \int \left(-\frac{1}{2ai(x+ai)} + \frac{1}{2ai(x-ai)}\right) dx \\
&= -\frac{1}{2ai} \int \left(\frac{1}{(x+ai)} - \frac{1}{(x-ai)}\right) dx \\
&= -\frac{1}{2ai} (\ln(x+ai) - \ln(x-ai)) \\
&= -\frac{1}{2ai} . \ln\left(\frac{x+ai}{x-ai}\right)
\end{aligned}
$$

Iniciou-se então, em 1702, uma longa troca de cartas entre Leibniz e Bernoulli, o que era muito comum na época. Ambos começaram a argumentar o significado de $\ln\left(\frac{x+ai}{x-ai}\right)$ e, particularmente, a respeito de $\log(-1)$.

Bernoulli afirmava que $\log(x) = \log(-x)$, sendo x um número real, baseando-se em alguns argumentos:

Argumento 1:

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(-x)}{-x}$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{d(-x)}{-x}$$
$$\ln(x) = \ln(-x)$$

Argumento 2:

$$(+a)^2 = (-a)^2$$
$$\log(+a)^2 = \log(-a)^2$$
$$2.\log(+a) = 2.\log(-a)$$
$$\log(+a) = \log(-a)$$

No argumento 2, diríamos que Bernoulli não teria encontrado um resultado correto, pois apesar de ninguém colocar os cálculos em cheque, a função logarítmica não está definida para os números negativos. Mas era justamente isso que procuravam Leibniz e Bernoulli, era uma definição para os logaritmos de números negativos ou até mesmo complexos. Utilizando esses mesmos cálculos Leibniz chegara a uma conclusão diferente de Bernoulli:

Argumento 1:

$$\log(+1) = \log(-1)$$
$$10^{\log(+1)} = 10^{\log(-1)}$$
$$+1 = -1$$

Argumento 2:

Se $\log(-1)$ é real, $\log(i)$ também deve ser real, logo:

$$\log(i) = \log\left(\sqrt{-1}\right) = \log(-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log(-1)$$

Argumento 3:

Fazendo $x = 2$ na expansão de Taylor:

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

teremos o seguinte:

$$\log(1 - 2) = \log(-1) = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \frac{16}{4} - \cdots$$

Na qual resulta em uma série divergente, não podendo ser real. Por esse motivo, a série é restrita ao intervalo $-1 < x \leq 1$.

Baseando-se nesses argumentos, Leibniz afirmava que era um absurdo o logaritmo de um número negativo ser igual ao logaritmo do seu simétrico.

Segundo Elon Lages Lima (LIMA, 2012), a controvérsia de Bernoulli e Leibniz foi resolvida por Euler em uma de suas publicações intitulada: "Da controvérsia entre os Senhores Leibniz e Bernoulli sobre os logaritmos de números negativos e imaginários". Na exponencial sabemos que $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$ e fazendo $\theta = \pi$ a identidade $e^{i\pi} = -1$. Então calculando o logaritmo natural dessa identidade, teremos

$$e^{i\pi} = -1$$
$$\ln e^{i\pi} = \ln(-1)$$
$$\ln(-1) = i\pi$$

e generalizou tal solução ao perceber, como de De Moivre nas raízes de números complexos, que na verdade $\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi)$, onde k é um número inteiro. Portanto, de mesmo modo da resolução das equações cúbicas para os complexos, a identidade de Euler confirmaria a existência de logaritmos de números negativos. Euler evidencia outro fato, que é consequência dessa fórmula. Qualquer número, positivo ou negativo, não tem um único logaritmo e sim uma infinidade de logaritmos e quando $k = 0$ tem-se o logaritmo principal. Para mostrar tal consequência faz-se, da relação $e^{i.(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta + 2k\pi) + i.\operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)$, vê-se que se $\ln a = c$ então $\ln a = c + 2k\pi$, pois $e^{c+2k\pi} = e^c.e^{2k\pi} = e^c(\cos(2k\pi) + i\operatorname{sen}(2k\pi)) = e^c = a$. Podendo somente o primeiro logaritmo de um número positivo ser um número real, todos os outros serão complexos, todos os logaritmos dos demais números, com exceção do zero, serão números complexos. A respeito disso Euler havia referido em seu artigo que vemos, portanto, que é essencial à natureza dos logaritmos que cada número tenha uma infinidade de logaritmos e que todos esses logaritmos sejam diferentes, não somente entre si, mas também de todos os logaritmos dos demais números (OLIVEIRA, 2014).

A exponencial complexa

Admitindo que o leitor esteja familiarizado através de séries nos livros de cálculo, uma demonstração para $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$ dar-se-á através da utilização das séries da constante e, seno e cosseno. Sejam as séries conhecidas:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

Na série da constante de Euler (e^x), Euler substituiu astuciosamente x por $i\theta$, obtendo para $e^{i\theta}$a seguinte sequência:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} \ldots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i.\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i.\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i.\frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + i.\frac{\theta^9}{9!} - \cdots$$

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} - + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + i.\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \cdots\right)$$

E como no início estão desenvolvidas as séries de $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, podemos facilmente perceber que $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$.

Uma segunda maneira de se demonstrar essa relação, basta é derivar o complexo $z = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$, depois integrando-o e finalmente colocando tudo na base e:

$$z = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$$

$$dz = d(\cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta)$$

$$dz = (-\operatorname{sen}\theta + i.\cos\theta)d\theta$$

$$dz = i.(\cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta)d\theta$$

$$dz = i.zd\theta$$

$$\frac{dz}{z} = id\theta$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int id\theta$$

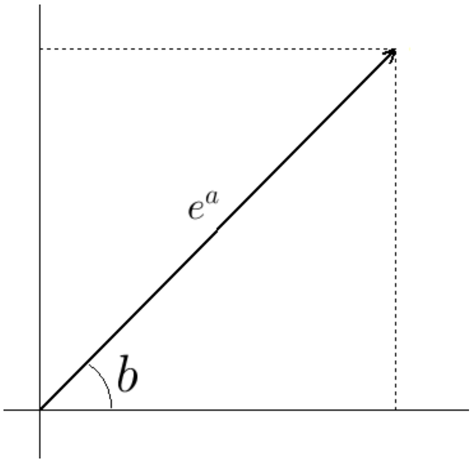
$$\ln z = i\theta$$

$$e^{\ln z} = e^{i\theta}$$

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$$

Portanto podemos representar o número complexo z na forma $z = r.e^{i\theta}$. Definimos, então, a exponencial e^z, para um número complexo da forma $z = a + bi$, mantendo a propriedade aditiva da exponencial real, sob a expressão $e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i.\operatorname{sen} b)$ e sua representação gráfica se dá conforme a Figura 3.

Figura 3: Representação de e^z no plano complexo



Fonte: Elaborado pelos autores.

Depois da descoberta de que $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$, Euler se surpreendeu ao considerar o argumento de tal relação com $\theta = \pi$, tendo a seguinte igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0$. Portando Euler não chegava a uma simples relação, mas ele encontrara uma fórmula que reúne, o que ele considerava, os cinco mais importantes números da matemática: e (que é a base do logaritmo natural), i (o número que representa a unidade imaginária $\sqrt{-1}$), π (o número pi, que é a razão de uma circunferência pelo seu diâmetro), 1 (um, a unidade numérica que está em todos sistemas de numeração) e 0 (zero, o elemento nulo). Tal fórmula foi considerada na época, inclusive por Euler, e até hoje por muitos matemáticos como "a mais bela de todas as fórmulas".

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fizemos um levantamento histórico dos números complexos e descobrimos que, para a resolução de algumas equações especiais do terceiro grau, faz-se necessário calcular a raiz quadrada de um número negativo. Fazendo uma análise sobre algumas dessas equações, descobrimos que elas tinham pelo menos uma raiz real. Esta foi a causa que motivou os matemáticos a conjecturarem a existência das raízes quadradas dos números negativos.

A civilização levou milhares de séculos para descobrir os números complexos e apenas três séculos após seu primeiro contato começou a compreender o verdadeiro significado e as potencialidades de aplicação desta magnífica descoberta. Passados mais de dois séculos, o ensino dos números complexos ainda não evoluiu como necessário para cativar o aluno do ensino médio, no qual, seus professores poderiam contextualizar melhor o conteúdo ,utilizando a história da matemática para proporcionar benefícios tanto na formação escolar (compreensão e conhecimento significativo do conteúdo), quanto na interpretação de fatos do cotidiano ,como por exemplo nos recursos computacionais que podem dar uma visão geométrica desse tópico e que são subutilizados ou nem sequer são utilizados.

Apesar de ser um assunto com amplo potencial para aplicações e contribuir com o desenvolvimento de inúmeras áreas do conhecimento, especialmente da matemática, a maioria dos livros didáticos faz uma abordagem meramente algébrica na forma $a + b.i$ ou na forma geométrica (a, b), ficando o aluno com a impressão errônea que esses números não possuem aplicação, quando há aplicações no Problema do Tesouro (LOPES, 2014) e no campo da Física. Assim, precisamos colocar em questão a prioridade que os livros dão a esse tipo de abordagem.

Não poderíamos finalizar este trabalho sem deixarmos de fazer uma observação quanto a um equívoco frequentemente cometido por alguns professores e livros-textos didáticos relativamente à origem dos números complexos: foram as equações cúbicas, e não quadráticas, que desencadearam todo o desenvolvimento teórico desse tema. Quando uma equação quadrática tinha o discriminante negativo era simples e comum o fato de dizer que essa equação não tinha raízes, mas com a descoberta da solução das cúbicas, através da fórmula de Cardano-Tartaglia, ficava evidente a existência daquelas raízes. Fruto do trabalho que durou mais dois séculos e iniciou a partir da ideia pioneira e corajosa de Bombelli. Como em muitas áreas da matemática, uma grande descoberta pode ter uma humilde origem e com os números complexos não foi diferente (LOPES, 2014).

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Variáveis complexas e a[plicações**. 3ª. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2002.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2ª. ed. [S.l.]: Editora Edgard Blücher, 2012.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. DOMINGUES. Campinas - SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**. Viçosa: Editora Livraria da Física, 2010.

IEZZI, Gelson *et al*. **Matemática:** ciência e aplicações. 2ª. ed. São Paulo - SP: Editora Atual, v. 3, 2004.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar 6:** complexos, polinômios, equações. 6ª. ed. São Paulo - SP: Atual (Coleção fundamentos da matemática elementar), v. 6, 2013.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A matemática do ensino médio**. 4ª. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, v. 3, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. 5ª. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2012.

LOPES, Thiago Beirigo. **Uma metodologia baseada na história para obtenção de conceito sobre Números Complexos**. Palmas - TO: Dissertação de Mestrado – UFT, PROFMAT, 2014. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1142/2012_00923_THIAGO_BEIRIGO_LOPES.pdf. Acesso em: 10 jun. 2015.

OLIVEIRA, Marcos Borges de. **Abordagens históricas sobre Logaritmos**. Cuiabá - MT: Dissertação de Mestrado – UFMT, PROFMAT, 2014. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1225/2011_01009_MARCOS_BORGES_DE_OLIVEIRA.pdf. Acesso em: 21 mar. 2015.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de história da matemática**. 1ª. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2012.

Histórico
Submetido: 10 de agosto de 2019.
Aprovado: 27 de setembro de 2019.
Publicado: 05 de outubro de 2019.

Como citar o artigo - ABNT
LOPES, Thiago Beirigo; COSTA, Ademir Brandão; OLIVEIRA, Ritianne de Fátima Silva de. A mais bela de todas as fórmulas em uma abordagem por meio dos Números Complexos. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática** (MT), v. 2, n. 2, e2019004, 2019.
https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172.e2019004