Sociedade Brasileira de Educação Matemática Regional – Mato Grosso

COINSPIRAÇÃO
Revista de Professores que ensinam Matemática
v. 1, n. 1, Janeiro a Junho 2018.
http://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/index.php/coinspiracao

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO FORMADOR DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: PRIMEIRAS REFLEXÕES SOBRE A ÁLGEBRA E O PENSAMENTO ALGÉBRICO[1]

MATHEMATICS TEACHER EDUCATORS SPECIALISED KNOWLEDGE: FIRST REFLECTIONS ON ALGEBRA AND ALGEBRAIC REASONING

Beatriz Fernanda Litoldo[2]

Miguel Ribeiro[3]

Maria Mellone[4]

Resumo

Temos como foco o conhecimento do formador de Professores que Ensinam Matemática (PEM) no âmbito do Pensamento Algébrico (PA). Para desenvolver o PA nos alunos, é essencial que estes desenvolvam um olhar que lhes permita entender as relações entre os elementos matemáticos e as estruturas em que estes se encontram. Isso envolve elaborar a capacidade de comparação e a busca por correspondências entre elementos e estruturas e entre estruturas, constituindo um conjunto de linguagens múltiplas associadas. O PA é um dos temas incluídos na Base Nacional Comum Curricular, e construir esse Pensamento com os alunos requer que o PEM detenha um conhecimento sobre o PA, o que implica que o formador de professores, por sua vez, revele um conhecimento que lhe permita incluir o PA na formação do professor. Assumindo a natureza especializada do conhecimento do PEM, na perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK), considera-se que também o conhecimento do formador é especializado, ainda que de natureza distinta. Neste artigo, apresenta-se e discute-se o conhecimento revelados por duas formadores de PEM sobre a Aritmética, a Álgebra e a Pensamento Algébrico. As informações foram coletadas por meio de entrevistas individuais, usando como lente teórica de análise o MTSK. Os resultados apontam um contato recente com o termo "Pensamento Algébrico", o que se associa a algumas problemáticas da distinção dos elementos nucleares e definidores de Álgebra e Pensamento Algébrico.

Palavras-chave: Formadores de Professores que Ensinam Matemática. Pensamento Algébrico. Mathematics Teachers' Specialized Knowledge.

Abstract

The focus here is on mathematics teacher educators knowledge in the field of Algebraic Reasoning. Developing students Algebraic Reasoning, require them to be endowed with a view that allows them to focus on, and understand the relationships between, the mathematical elements and the structures in which they are found. This involves develop the ability to compare and search for correspondences between elements and structures, and between structures, developing thus a set of associated multiple languages. The Algebraic Reasoning is one of the topics included in the National Curricular Common Base, and the development of such students' Reasoning requires mathematics teachers to be knowledgeable on Algebraic Reasoning, which implies teacher educators to be in possession of a knowledge leading to include a focus on its development on teacher education. Assuming the

[1] Uma versão preliminar deste texto foi apresentada no I Encontro Mato-Ggrossense de Professores que Ensinam Matemática (Emapem), realizado em Tangará da Serra/MT, junho de 2018.

[2] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Paulista "Júlio, de Mesquita Filho" (Unesp), Rio Claro/SP, Brasil. Doutoranda em Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade de Campinas (Unicamp), Campinas/SP, Brasil. *E-mail*: beatrizfernanda_rc@hotmail.com.

[3] Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Huelva, Huelva/Espanha. Professor da Faculdade de Educação da Unicamp. *E-mail*: cmribas78@gmail.com.

[4] Doutora em Matemática pela Universidade de Nápoles Federico II, Itália. Professora do Departamento de Matemática e Aplicações "Renato Caccioppoli" da University of Naples Federico II, Itália. *E-mail*: maria.mellone@unina.it.

specialized nature of teachers' knowledge, from the *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) conceptualization, leads to consider also the knowledge of the teacher educator as specialized, albeit of a different nature. In this paper, we present and discuss two teacher educators knowledge on Arithmetic, Algebra and Algebraic Reasoning. Data collection included individual interviews, and the MTSK was the theoretical lens of analysis. The results bring to discussion the recent contact with the term "Algebraic Reasoning", which is associated to some problematic issues regarding the distinction between the core elements of Algebra and Algebraic Reasoning.

Keywords: Mathematics Teacher Educators. Algebraic Reasoning. Mathematics Teachers' Specialized Knowledge.

1. Introdução

Recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) atribui uma maior importância ao Pensamento Algébrico (PA) (BRASIL, 2018). Esse documento define e orienta um conjunto de aprendizagens fundamentais para os alunos durante a educação escolar. Seu conteúdo é composto por várias unidades temáticas, sendo uma delas denominada Álgebra. Tal texto menciona que é por meio do trabalho da unidade *Álgebra* que se espera que o PA seja desenvolvido nos alunos[5]. A nível internacional, o PA passou a ser foco de atenção nas pesquisas em Educação Matemática há mais de 20 anos (BLANTON; KAPUT, 2005; KAPUT, 1998; KIERAN et al., 2016; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; RADFORD, 2011), sendo parte do currículo, ou equivalente, em muitos países — por exemplo, Portugal (2013), Itália (2012) e Chile (2009).

Para que o Professor que Ensina Matemática (PEM) possa desenvolver o PA dos alunos, é essencial que sua formação tenha como um dos objetivos desenvolver o conhecimento do professor, considerando um foco nas especificidades desse conhecimento para a prática docente e não assumindo como central um conjunto de generalidades (RIBEIRO, 2018). Essas especificidades estão no âmbito dos conhecimentos matemáticos e pedagógicos dos tópicos e das unidades temáticas a abordar. Nesse sentido, assumimos a conceitualização do *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK)[6], definido por Carrillo et al. (2018). Assim, para que a formação de professores promova o desenvolvimento desse conhecimento especializado, torna-se essencial que o formador de professores detenha, ele próprio, um conhecimento que permita fazer essa construção (CONTRERAS et al., 2017; RIBEIRO, 2016).

[5] Em nossa leitura, na BNCC é assumida uma interpretação equivocada do que se determina, a nível internacional, como Pensamento Algébrico (BLANTON; KAPUT, 2005; MELLONE, 2011; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009); porém, por não ser nosso foco de atenção neste texto, essa discussão será realizada em outro momento.

[6] Decidimos manter a nomenclatura deste modelo em Inglês, pois esta é uma conceitualização do conhecimento do PEM reconhecida internacionalmente, e realizar sua tradução poderia influenciar em possíveis distorções do sentido e do conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo.

Procurando formas de melhorar a formação de professores, em particular no que se refere ao PA, torna-se premente um foco no conhecimento do formador de professores. São ainda escassas pesquisas que se centrem nesse ponto (GOODWIN et al., 2014; SUPERFINE; LI, 2014); mais reduzidas ainda são as investigações voltadas ao conhecimento especializado do formador de PEM (MELLONE; JAKOBSEN; RIBEIRO, 2015; RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2016); e, portanto, mais restritas são as que se referem a esse conhecimento no âmbito do PA. Na revisão de literatura de pesquisas nacionais dirigidas ao conhecimento especializado do formador de PEM, não encontramos nenhum estudo que tivesse como base de discussão o MTSK referente ao PA.

Para contribuir para a melhoria da formação e da prática, torna-se importante obter uma mais ampla compreensão sobre o conteúdo do conhecimento especializado do formador (e do professor) de PEM no âmbito do Pensamento Algébrico. Nesse sentido, buscamos respostas para a seguinte pergunta: que conhecimento matemático especializado revelam formadores de Professores que Ensinam Matemática no âmbito do Pensamento Algébrico e das inter-relações deste com a Aritmética e a Álgebra?

2. Referencial Teórico

O Pensamento Algébrico encontra-se presente em uma das unidades temáticas da BNCC (BRASIL, 2018). Porém, apesar do relativo consenso sobre sua importância para a formação matemática dos alunos, não há acordo no que diz respeito à forma de entender esse Pensamento. Este surge atrelado às ideias e às discussões da transição entre a Aritmética e a Álgebra (KIERAN, 1992; KIERAN et al., 2016), visto que desenvolver nos alunos o pensar algebricamente desde as primeiras etapas educacionais contribui para estes adquiram, gradativamente, experiências em raciocínios algébricos. Essa passagem da Aritmética à Álgebra é, para alguns autores (GERMI, 1997; KIERAN, 1992; KIERAN et al., 2016), marcada por momentos críticos, envoltos por tensões e conflitos na busca da associação da Aritmética com o novo tipo de linguagem, a algébrica, e com os transformismos algébricos utilizados nas resoluções de problemas (FIORENTINI; MIORIN; MIGUEL, 1993).

Tomamos como ponto de partida uma discussão que se inicia com as contraposições da Aritmética e da Álgebra, buscando compreender esses campos da Matemática e suas conexões e diferenciações, por vezes, ténues (considerando a fronteira). Em seguida, discorremos sobre as concepções da Álgebra, a fim de compreender melhor a categorização do Pensamento Algébrico e, por conseguinte, o conhecimento do formador do PEM nesse âmbito.

A Aritmética contempla dimensões relacionadas aos números, assumidos como quantidades, e às operações numéricas envolvendo-os (KIERAN, 2018). Tem como foco manipulativo as ações de encontrar respostas numéricas particulares para as operações, mobilizando um pensamento que busca realizar apenas os cálculos procedimentais (BOOTH, 1995; KIERAN, 1992). Na Álgebra, alguns autores a caracterizam como uma linguagem específica, usada para representar, por exemplo, quantidades desconhecidas (BOOTH, 1995; FIORENTINI; MIORIN; MIGUEL, 1993), de modo que "o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral." (BOOTH, 1995, p. 24).

Essa maneira de entender a Álgebra a caracteriza como uma área da Matemática associada a uma linguagem simbólica, na qual deter o domínio desses signos equivale a obter sucesso nesse campo (RADFORD, 2011). Essa compressão enfatiza os procedimentos e as transformações das expressões algébricas, induzindo mecanizações procedimentais, centrando o ensino apenas no trabalho de como resolver o problema por meio das regras e das fórmulas matemáticas (FIORENTINI; MIORIN; MIGUEL, 1993).

Assim, a linguagem simbólica mais comumente utilizada no ensino de Álgebra nas escolas são as letras (GERMI, 1997). De acordo com a situação matemática, estas podem assumir significados diferentes. Um deles se associa aos parâmetros, utilizados como ferramenta de designação, instrumento de denominação de dimensões nas fórmulas (como largura, comprimento e altura), recurso para nomear objetos geométricos (como pontos, retas, círculos e ângulos) ou ainda meio para especificar elementos de uma família, como a família de planos. O outro se vincula às incógnitas, designadas para representar um número desconhecido, sendo utilizadas, por exemplo, nas modelações em equações e manipuladas no cálculo algébrico a fim de determinar o valor desconhecido. O último sentido se relaciona com as variáveis, consideradas pertencentes a um conjunto de números conhecidos.

Booth (1995) argumenta que uma das diferenças entre a Aritmética e a Álgebra é justamente a maneira como as letras aparecem nesses dois campos da Matemática. Enquanto na Álgebra as letras são mais utilizadas para indicar valores desconhecidos — as incógnitas e variáveis (BOOTH, 1995; FIORENTINI; MIORIN; MIGUEL, 1993) —, na Aritmética elas aparecem somente como designações de parâmetros (BOOTH, 1995). Outro fator diferencial entre essas áreas envolve seus objetos matemáticos de estudo. A Aritmética compreende os números e as operações matemáticas, objetivando a resolução de problemas para a obtenção de respostas numéricas (BOOTH, 1995; KIERAN, 1992; KIERAN, 2018); já a Álgebra procura expressar as relações e os transformismos algébricos, sendo eles apresentados de forma simplificada e geral por meio das regras e das fórmulas. As manipulações dos procedimentos algébricos consideram sua veracidade, independentemente de quais sejam os valores numéricos exatos (BOOTH, 1995).

A Álgebra, em uma perspectiva escolar, é considerada por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) em três dimensões: (i) *Linguístico-Pragmática*, na qual se estabelece relações entre as atividades pedagógicas e a resolução de problemas por meio do mecanismo dos transformismos algébricos; (ii) *Fundamentalista-Estrutural*, que configura as propriedades estruturais das operações e, (iii) *Fundamentalista-Analógica*, que articula as atividades pedagógicas e a resolução de problemas com a justificação das propriedades estruturais, além de utilizar recursos geométricos para a visualização das identidades algébricas.

Lins e Gimenez (2001) também determinam três campos para a referida área: (i) *Letrista*, que envolve o cálculo com letras; (ii) *Letrista Facilitador* , que integra a manipulação das estruturas em situações concretas e, posteriormente, as formalizações e, (iii) *Modelagem Matemática*, que engloba atividades de investigação baseadas em situações reais[7].

Sustentados em resultados de pesquisas recentes, outros pesquisadores pontuam que a Álgebra pode e deve ser considerada uma forma peculiar de pensar (BLANTON; KAPUT, 2005; MELLONE, 2011; RADFORD, 2011), sendo ela composta tanto pelas relações matemáticas abstratas quanto pelas representações expressas por outras estruturas definidas por operações ou relações entre objetos matemáticos (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Nessa perspectiva, a Álgebra deixa ter um apenas um caráter procedimental envolvendo seus signos e se torna também uma atividade de generalização, que tem como foco um pensamento e um raciocínio acerca das situações matemáticas (BLANTON; KAPUT, 2005).

Essa dupla consideração, atrelada aqui à Álgebra, pode ser associada às concepções operacionais e estruturais (SFARD, 1991), que, embora sejam de uma mesma natureza, são vistas como diferentes e complementares. A concepção operacional está relacionada aos procedimentos, com reflexos na compressão dos conteúdos matemáticos, enquanto a

[7] Para mais informações sobre as dimensões da Álgebra Escolar, consulte o texto de Litoldo e Ribeiro (2018).

estrutural envolve relações com a estrutura matemática no sentido da compreensão relacional do conceito (matemático) como um todo (SFARD, 1991).

Fundamentada nas concepções de Sfard (1991), Mellone (2011) compreende que o PA, assim como todo o Pensamento Matemático, é envolto por um discurso baseado (e formalizado) na própria organização desse conhecimento; assim, as linguagens algébricas, em seus distintos tipos e níveis (RADFORD, 2011), estão vinculadas tanto aos aspectos processuais — por exemplo, os transformismos algébricos — como às características relacionais, às relações entre as regularidades e a suas generalizações (MELLONE, 2011). Uma das ideias centrais do PA refere-se à sustentação das bases para a atividade de generalizar, sendo esta um processo central na aprendizagem da matemática, pois “ver o geral através do particular e o particular no geral” (MASON, 1996, p. 19) é um movimento de reconhecer uma relação determinada entre elementos de um conjunto com finalidade de conjecturar propriedades gerais, ou seja, generalizá-los (e vice-versa).

Para Blanton e Kaput (2005), o PA corresponde a um hábito mental que permeia e estrutura toda a Matemática. Tal prática exerce e desenvolve a capacidade (dos alunos) em investigar e explorar as estruturas e as relações matemáticas. Os autores assinalam quatro vertentes para o PA: (i) *Aritmética Generalizada*, que determina a generalização da estrutura aritmética; (ii) *Pensamento Funcional*, que inclui a generalização das relações funcionais e a representação dos signos atribuídos às quantidades e a suas manipulações algébricas; (iii) *Modelação*, que faz a representação e a formalização das generalizações de regularidades em problemas matemáticos (ou não) e, (iv) *Generalizações sobre relações e sistemas matemáticos abstratos de computação*, na qual estão as operações em classes de objetos.

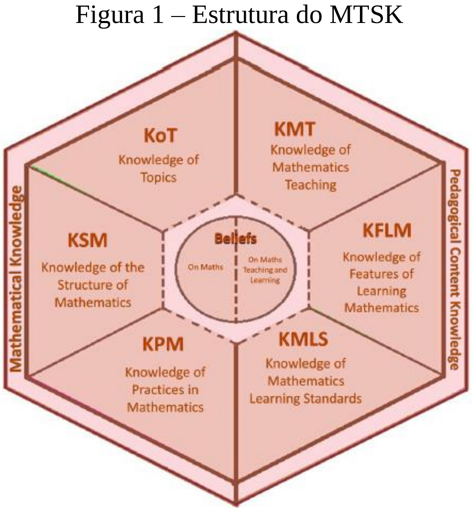
Já Ponte, Branco e Matos (2009) definem três domínios no PA, associando-os aos “trajetos” da resolução de problemas: (i) *Representar*, no qual estão tipos e relações entre as representações[8] e compreensão do sentido de um mesmo símbolo em seus diferentes contextos; (ii) *Raciocinar*, que estabelece a relação entre os transformismos algébricos, a análise das propriedades sobre objetos matemáticos e a generalização das regularidades e, (iii) *Resolver Problemas*, que inclui a modelação de situações matemáticas (ou não) por meio das representações algébricas, como expressões algébricas, equações, inequações, funções, entre outras[9].

[8] Por exemplo, gestual, verbal, numérica, tabular, gráfica e simbólica (RADFORD, 2011).
[9] Para mais informações sobre as dimensões do PA, consulte o texto de Litoldo e Ribeiro (2018).

Esses modos de entender a Álgebra e o PA respaldam um foco nos alunos. No entanto, esse conhecimento dos alunos tem de formar parte necessariamente do conhecimento dos professores, mas de maneira mais ampla, profunda e relacional. Efetuando um paralelismo entre as complementaridades do conhecimento do professor com relação ao conhecimento do aluno, assumimos que o formador de PEM deverá deter um conjunto de conhecimentos específicos no que concerne a seu trabalho de formador (RIBEIRO, 2016), neste caso, no âmbito do PA. Portanto, partimos do pressuposto de que o conhecimento do professor é especializado (CARRILLO et al., 2018), e consideramos que o conhecimento do formador de PEM também é de todo especializado, sendo que ambos são, necessariamente, formados por especificidades de natureza distintas e têm focos e objetivos complementares (RIBEIRO, 2016).

Desse modo, tomamos como embasamento teórico o modelo *Mathematic Teachers' Specialized Knowledge* (CARRILLO et al., 2018), que considera dois domínios de conhecimento especializado do professor — o *Mathematical Knowledge* (MK) e o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), cada um deles têm três subdomínios — e um associado às crenças do professor sobre a matemática e o ensino e a aprendizagem desta (Figura 1). No MK, consideram-se os subdomínios *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM). No PCK, há os subdomínios *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM), *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS). Cada um deles compreende um conjunto de dimensões. Contudo, tendo em vista os objetivos associados a este artigo, discutimos apenas os subdomínios do MK[10].

Figura 1 – Estrutura do MTSK



Fonte: (CARRILLO et al., 2018, p. 6).

[10] Para mais informações sobre PCK, veja o texto de Carrillo et al. (2018).

O KoT contempla um conhecimento amplo e profundo sobre cada tópico da Matemática, englobando dimensões relacionadas às definições, às propriedades e a seus fundamentos matemáticos, bem como distintos registros de representação. O conhecimento sobre os procedimentos *standards* e os não *standards* envolvendo as noções de como, por que e quando se faz, além de se constituir como uma dimensão desse subdomínio.

No caso do PA, entendemos que é necessário ao professor compreender de forma abrangente e profunda os tópicos matemáticos em que é possível desenvolver esse Pensamento (KoT – fundamentos). Por exemplo, para o tópico matemático *sequências*, cumpre ao professor ter um conhecimento sobre a definição de sequências, podendo elas ser de repetição ou ser recursivas (KoT – definição de sequência de repetição e KoT – definição de sequência recursiva), suas propriedades com relação à estrutura do padrão de cada tipo de sequência (KoT – propriedades) e seus distintos tipos de retratações, sendo estas gestuais, verbais, pictóricas, gráficas, tabulares, numéricas e simbólicas (KoT – registros de representações).

O KSM corresponde a elementos do conhecimento relacionados às estruturas matemáticas, ou seja, a cada um dos tópicos matemáticos e ao modo como como eles se integram com outros tipos de construções internas e externas da Matemática. As conexões auxiliares e transversais, bem como as relacionadas aos conceitos mais elementares e avançados dessa disciplina também constituem este subdomínio. Ainda no exemplo das sequências, o trabalho com os diferentes tipos destas (figurais/numéricas de repetição ou recursivas crescentes/decrescentes) possibilita estabelecer e desenvolver conexões entre os tópicos relativos à Geometria — por exemplo, uma sequência crescente constituída por figuras geométricas — e aos números e às operações — como sequências crescentes de números ímpares e múltiplos de dois. Além disso, permite explorar e desenvolver as inter-relações entre as resoluções de problemas (modelações pictóricas, gráficas ou/e algébricas) e potencializar discussões sobre as possíveis relações funcionais existentes entre os tipos de modelação, relações que podem variar entre mais elementares e mais sofisticadas.

O KPM se refere ao conhecimento da prática matemática, a sua fundamentação e a sua produção, isto é, ao conhecimento dos critérios necessários e suficientes para gerar definições e generalizações (matemáticas) e das diferentes formas de validação e demonstração dos resultados matemáticos. O conhecimento da sintaxe matemática (KPM – papel dos símbolos e da linguagem formal) e as múltiplas estratégias de resolução de problemas ou de modelagem (KPM – processo associado à resolução de problemas como forma de fazer Matemática) também se constituem como dimensão deste subdomínio. Seguindo o exemplo das sequências, em particular de uma sequência geométrica, cumpre ao professor conhecimentos sobre as diferentes formas de explorar a regularidade do padrão geométrico e conhecer/representar as possíveis modelações algébricas correspondentes à sequência geométrica (KPM – processo associado à resolução de problemas como forma de fazer Matemática e KPM – papel dos símbolos e da linguagem formal)

Desse modo, compreender o PA, os tópicos matemáticos em que é possível desenvolvê-lo, o modo como elaborar tarefas que permitem esse trabalho com os alunos e a identificação dos níveis de PA em suas produções faz parte especificidades do conhecimento matemático do PEM. Ademais, constitui o conhecimento matemático especializado do formador de PEM, pois compete a esse formador deter um conhecimento do PA e de suas dimensões que permita elaborar tarefas destinadas a aceder e desenvolver o conhecimento especializado do PEM no âmbito do PA em seus diferentes domínios e subdomínios (CONTRERAS et al., 2017; RIBEIRO, 2016).

3. Contexto e Método

Este trabalho forma parte de uma pesquisa de doutorado que tem como objetivo geral obter elementos que permitam identificar e compreender as especificidades do conhecimento do formador de PEM, associado ao PA, e, de forma conjunta, entender como estas se relacionam e se desenvolvem ao longo do tempo. Este estudo se encontra vinculado às atividades de pesquisa do grupo *Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor que Ensina Matemática* (CIEspMat)[11]. Neste artigo, objetivamos estudar os entendimentos preliminares revelados por formadores de PEM (Lina e Carol) em uma entrevista[12], que aborda questões referentes à Aritmética, à Álgebra e ao Pensamento Algébrico. Lina tem 16 anos de experiência, sendo 11 em sala de aula e os últimos 5 na formação de PEM. Carol possui 22 anos de experiência, sendo 6 na prática de sala de aula, atualmente é formadora de PEM na formação inicial.

A investigação aqui discutida segue um tratamento qualitativo, associada a um estudo de caso instrumental (STAKE, 2000). Cada uma das formadoras, Carol e Lina,

[11] O grupo tem como foco de pesquisa e de formação o conhecimento e a prática do Professor que Ensina Matemática em todas as etapas educacionais, da Educação Infantil até o Ensino Superior (no caso deste último nível, com foco nos formadores de professores).

[12] Os nomes apresentados nesta pesquisa são de caráter fictício, de modo a resguardar a identidade de cada um dos participantes.

constitui um caso. Para compreender inicialmente o que ambas pensam/compreendem a respeito da temática do estudo, optamos por realizar entrevistas individuais do tipo semiestruturada[13].

As entrevistas integravam três partes. A Parte I corresponde à identificação pessoal, contemplando aspectos de suas experiências de sala de aulas e de formação, seus contextos de trabalho e o foco de pesquisa que desenvolveram/desenvolvem. A Parte II é composta por perguntas sobre a Aritmética, a Álgebra, o PA e suas inter-relações. Já a Parte III relaciona-se à busca das especificidades do conhecimento das formadoras no processo de elaborar e resolver tarefas potencialmente algébricas.

Nesta investigação, analisaremos apenas a Parte II. Entre as respostas às 13 perguntas que a compõem, discutiremos apenas as colocações das formadoras sobre 5 indagações (Quadro 1). As questões (1), (2) e (4) objetivavam identificar o conhecimento que Lina e Carol possuíam sobre a Aritmética, a Álgebra e o PA respectivamente. As interrogações (3) e (5) tinham como objetivo identificar o conhecimento que elas possuíam sobre os elementos que diferenciam a Aritmética da Álgebra e o PA da Álgebra.

Quadro 1 – Perguntas que formam parte da entrevista

PARTE II
1) Para você, o que é Aritmética?
2) Para você, o que é Álgebra?
3) Se tivesse que diferenciar a Aritmética da Álgebra, como faria essa distinção?
4) Para você, o que é o Pensamento Algébrico?
5) Você considera que existe diferenças entre o Pensamento Algébrico e a Álgebra?

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

As entrevistas foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas em sua totalidade. Nesta investigação, serão apresentados e analisados apenas alguns trechos, constituídos pelas respostas das formadoras. A transcrição destes trechos foi realizada linha a linha, com o objetivo de identificar em quais linhas estão as evidências do conhecimento do formador. Quando houver interrupções nas falas, estas serão representadas por [...] (RIBEIRO; CARRILLO; MONTEIRO, 2012). A contagem das linhas é dada de modo contínuo; assim, os trechos apresentados levam em consideração a ordem cronológica e a numeração da transcrição total de cada uma das entrevistas.

As informações desta investigação foram selecionadas por meio de uma análise transversal de cada uma das respostas das entrevistadas, de acordo com objetivo desta

[13] Entrevistas com duração aproximadamente de 40 minutos cada.

pesquisa. Com as partes escolhidas, foi feita uma releitura destas, a qual ocorreu em dois momentos sequenciais. Primeiramente, utilizando a lente teórica do modelo *MTSK* (CARRILLO, et al., 2018), buscamos, nas respostas eleitas, elementos do conhecimento. No segundo momento de análise, procuramos identificar quais das perspectivas de Aritmética, Álgebra e PA e quais de suas respectivas dimensões eram reveladas nos trechos transcritos. Ao longo do texto, as evidências pontuadas serão chamadas para a discussão por meio da indicação das linhas correspondentes aos trechos da transcrição.

4. Análise

As formadoras Lina e Carol declararam já terem ouvido falar sobre Aritmética, mas seus contextos de contato com a temática se diferenciam em alguns pontos. Ambas se lembraram da Aritmética vista nos tempos em que eram alunas do Ensino Básico. Além disso, no caso de Lina, seu contato com essa área se deu enquanto era professora (na escola) e formadora de PEM. Já o contato complementar de Carol aconteceu por meio de algumas leituras. Os Quadros 2 e 3 apresentam respostas à pergunta "*Para você, o que é Aritmética?*".

Quadro 2 – Trecho transcrito da resposta de Lina

[1] [2]	*É um conjunto de teorias, técnicas, procedimentos e representações envolvendo operações matemáticas.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

Quadro 3 – Trecho transcrito da resposta de Carol

[1]	*Aritmética seria as operações e relações com números*.

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

No Quadro 2, é possível identificar elementos relacionados ao KoT – procedimentos e ao KoT – representação, pois Lina se referiu aos procedimentos e às representações que compreendem as operações matemáticas: os cálculos aritméticos ([1-2]). No Quadro 3, averiguamos fatores vinculados ao KoT – definição quando Carol caracterizou a Aritmética pelos números e por suas operações numéricas ([1]). Tais respostas vão ao encontro das considerações que Kieran (2018) atribui à Aritmética e da mobilização de procedimentos numéricos destacados por Booth (1995) e Kieran (1992).

Ambas as formadoras de PEM mencionaram já terem ouvido falar da Álgebra. Lina pontuou que seu contato com essa área se deu a partir do contexto escolar e, depois, enquanto professora e formadora de PEM. Carol apenas complementou que sua interação com a Álgebra foi nos Anos Finais do Ensino Básico. Na resposta à pergunta "*Para você, o que é Álgebra*?", as duas iniciaram suas falas expressando um entendimento que destaca a Álgebra como um contexto matemático expressado e fundamentado no signo algébrico (as letras), como pode ser observado nos Quadros 4 e 5.

Quadro 4 – Trecho transcrito da resposta de Lina

[3] [4] [5]	*Até bem pouco tempo atrás, eu achava que Álgebra era algo que envolvia letrinhas* [...]. *Então, por exemplo, a Álgebra para mim começava no sétimo ano, porque entravam as equações, então, resoluções de equações.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

Quadro 5 – Trecho transcrito da resposta de Carol

[2] [3]	*Pensando assim, na época que eu estava na escola era quando as letras entravam nos lugares dos números. A Álgebra tinha esse sentido.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

Essas respostas evidenciam noções de Álgebra ligadas a suas linguagens simbólicas, as letras (Lina [3] e Carol [2-3]), e a seus procedimentos de resoluções (Lina [4-5]), por exemplo, em equações (RADFORD, 2011). Esses entendimentos, revelam um conhecimento relacionado ao KoT – registros de representação, quando se utiliza as letras para representar um número desconhecido (representação algébrica), e KoT – procedimentos, quando se resolve, por exemplo, equações que contêm as letras por meio de processos e transformismos algébricos. A utilização destas, nas falas de Lina e Carol, assume um caráter puramente simbólico e ocorre em situações em que se representa um valor desconhecido em uma equação, sendo esta uma das compreensões sobre o uso de letras destacadas por Germi (1997).

Os indícios observados nas colocações das formadoras se aproximam muito a elementos do conhecimento relacionados às concepções da Educação Algébrica de Lins e Gimenes (2001), na dimensão *Letrista*, que tal campo restringe a Álgebra aos cálculos com as letras. Também se acercam da explicação de Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) sobre a dimensão *Linguístico-pragmática*, que envolve os processos de resolução de problemas por meio dos mecanismos procedimentais. Essas duas perspectivas compreendem que a Álgebra é constituída pelos simbolismos algébricos, em particular as letras, e pelas resoluções dos problemas sustentados pelos transformismos algébricos.

Na continuação da resposta sobre a Álgebra, outros elementos de conhecimentos foram revelados por Lina e Carol. As formadoras apresentam indícios de um entendimento que toma a Álgebra não somente como processos algébricos para se resolver problemas, permeados por uma simbologia alfanumérica, mas também como um raciocínio que envolve estruturas definidas pelas operações e/ou um conjunto de situações sobre relações entre objetos matemáticos (KIERAN, 2018; MELLONE, 2011; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Assim, os Quadros 6 e 7 revelam mais evidências de conhecimento de Lina e Carol sobre a Álgebra.

Quadro 6 – Trecho transcrito da resposta de Lina sobre a Álgebra enquanto contexto matemático que envolve generalizações e instrumento de cálculo em outras áreas da Matemática

[6]	*Então, hoje, a Álgebra, para mim, é algo que envolve generalizações. É algo que envolve um*
[7]	*pensamento de abstração de algo* [...]. *Envolve a busca por padrões e envolve a busca por uma*
[8]	*linguagem que consiga contemplar aspectos que são mais particulares da Matemática* [...]. *Agora*
[9]	*também consigo pensar na Álgebra como uma ferramenta, por exemplo; então, às vezes eu estou*
[10]	*em um contexto que é geométrico, mas eu uso a Álgebra para me ajudar a resolver determinado*
[11]	*problema.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

O Quadro 6 revela elementos de conhecimento de Lina atrelados ao KoT – definição. Ela buscou atribuir uma definição à Álgebra, dividindo-a em dois (possíveis) domínios: um relacionado aos padrões, às generalizações e a suas linguagens ([6-8]), e outro determinado como um instrumento matemático para resolver problemas em diversos contextos ([9-11]). Aspectos conectados ao KoT – procedimentos também foram mostrados por Lina ([6-7]) no que se refere às características do resultado de abstração dos padrões e das generalizações, ponderando as particularidades de cada problema, que envolvem como, quando e por que se pode fazer tais processos de abstração (MASON, 1996).

Também foram desvelados por Lina elementos do KPM – linguagem formal, visto que ela mencionou as buscas por linguagens particulares da Matemática ([7-8]), ou seja, linguagens específicas da sintaxe matemática. Esses conhecimentos estão alinhados à perspectiva de Lins e Gimenes (2001), ao tratarem da vertente *Letrista Facilitadora* e considerar que a Álgebra envolve um processo de abstração na busca de padrões e de generalizações, e ao ponto de vista de Blanton e Kaput (2005) sobre a dimensão *Pensamento Funcional*, ao pontuar a questão das linguagens matemáticas, suas simbologias e as representações atribuídas às quantidades e a suas relações funcionais.

O uso da Álgebra como uma ferramenta para resolver problemas ([10-11]) atrela-se ao KoT – procedimentos e propriedades algébricas, pois a entrevistada revela conhecer a possibilidade de se utilizar os resultados e os transformismos algébricos na resolução de problemas ([10-11]), e ao KSM –conexão entre conceitos matemáticos, visto que se tem o uso da Álgebra em um contexto geométrico ([9-11]). Os entendimentos da Álgebra como ferramenta para resolver um problema fazem parte da perspectiva de Ponte, Branco e Matos (2009), especificamente quando os autores definem a dimensão *Resolver Problemas*, uma vez que tais conhecimentos compreendem as capacidades de explorar e resolver problemas mediante representações algébricas.

Quadro 7 – Trecho transcrito da resposta de Carol sobre a Álgebra enquanto contexto matemático que envolve generalizações

[4] [5]	*Passado um tempo depois, a Álgebra tem essa ideia de generalização, de conseguir por meio de alguns modelos ou expressões, ou fórmulas, generalizar alguma situação.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

No Quadro 7, Carol também revelou indícios do KoT – definição ao indicar que a Álgebra abarca uma ideia de generalização de situações ([4]). Além disso, há vestígios KoT – registros de representações, neste caso, algébricas ao destacar o meio pelo qual tais generalizações podem ser expressas ([4-5]). Esses conhecimentos revelados fazem parte da perspectiva de Ponte, Branco e Matos (2009) sobre a dimensão *Raciocinar*, já que Carol menciona a ideia de generalizar situações por meio do estabelecimento de representações algébricas (modelos, expressões ou fórmulas).

As formadoras apresentam conhecimentos sobre a Álgebra relacionadas às generalizações (Quadro 6, Lina [6], e Quadro 7, Carol [4]) e à resolução de problemas (Quadro 6, Lina [10-12]). Esse ponto de vista se alinha a um entendimento, em termos de linguagem algébrica, das concepções estruturais e operacionais (MELLONE, 2011; SFARD, 1991).

Os Quadros 8 e 9 estão relacionados à pergunta "*Se tivesse que diferenciar a Aritmética da Álgebra, como faria a distinção?*".

Quadro 8 – Trecho transcrito da resposta de Lina

[12] [13] [14] [15] [16] [17] [18]	*Eu acho que, basicamente, para mim, está na ideia de generalizar uma coisa, uma ideia, generalizar um conceito, generalizar um procedimento* [...]. *Vou dar um exemplo numérico. Se eu tenho uma sequência numérica, 1, 2, 4, 8, qual o próximo? O próximo é 16, porque eu pego o anterior e dobro. Agora, se eu pedir o 63.º, eu vou precisar usar a Álgebra para fornecer esse 63.º sem precisar passar pelos próximos 63 termos. Agora eu posso resolver isso aritmeticamente, que é ficar dobrando até chegar no 63.º. A diferença é de fato esse pensamento que generaliza; então, os procedimentos que eu uso para generalizar diferenciam a Álgebra da Aritmética.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

No Quadro 8, Lina ([12-13]) destacou a questão da generalização de conceitos e de procedimentos (MASON, 1996). Ademais, por meio de um exemplo referente a uma sequência numérica ([13-17]), frisou duas estratégias de resolução: a algébrica, que faz uso de um termo geral da sequência para achar o valor solicitado ([15-16]), e a aritmética, que copila todos os termos precedentes ao solicitado ([16-17]). Essa diferenciação centrada no tipo de procedimento que se usa para resolver um problema ([17-18]) se aproxima das distinções entre a Aritmética e a Álgebra destacadas por Booth (1995).

O exemplo citado por Lina revelou elementos do KoT – procedimentos quando foi mencionada a característica da regularidade da sequência apresentada: o dobro ([14]). Reconhecer esse traço e evidenciar duas possibilidades de chegar ao termo solicitado, o 63.º termo ([16-18]), também integra o KoT – procedimentos, relacionando-se, neste caso, ao modo como tais possibilidades de resolução podem ser usadas para chegar ao termo solicitado e ao porquê disso.

Quadro 9 – Trecho transcrito da resposta de Carol

[6] [7] [8] [9] [10]	*Eu acho que a Aritmética envolve essa questão dos números naturais, racionais, envolve muito a questão numérica, nesse sentido, naturais, racionais, inteiros; e a Álgebra procura envolver os elementos, sem essa especificidade deste número em específico* [...]. *Por exemplo,* [...] *você vai fazer uma equação, você resolve lá: x igual a tanto, três. Aí depois você substitui o x, o três no lugar do x para ver se a conta está certa, entendeu?*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

No Quadro 9, Carol retomou suas perspectivas sobre a Aritmética e a Álgebra para argumentar justamente que, para ela, a característica que as diferencia é a especificidade ou não do número ([6-8]). Enquanto a Aritmética, para Carol, envolve as quantidades numéricas bem estabelecidas (KIERAN, 2018); na Álgebra se tem as ideias associadas ao valor desconhecido, ou seja, a um número não explícito (BOOTH, 1995; FIORENTINI; MIORIN; MIGUEL, 1993). Essa ideia de diferenciação está centrada na especificidade ou não do número, e, quando este não é revelado diretamente, há a representação por meio das letras (GERMI, 1997), sendo esse um dos pontos de diferenciação relativos à linguagem simbólica citados por Booth (1995). O exemplo de Carol ([8-10]) revela alguns aspectos do KoT – registros de representações ao designar a letra *x* para o valor desconhecido em uma equação ([9]), do KPM – papel do símbolo ao compreender o significado da letra *x* na situação exemplificada e do KoT – procedimentos ao se referir à característica do valor de *x* encontrado, quando mencionou a validação deste ao retomar a equação ([9-10]).

No que se refere ao Pensamento Algébrico, as formadoras revelaram que foram apresentadas ao termo recentemente. Lina o viu pela primeira vez no ano de 2017, no trabalho de pesquisa; e Carol, no ano de 2016, em leituras. Os Quadro 10 e 11 são referentes à pergunta "*Para você, o que é o Pensamento Algébrico*?".

Quadro 10 – Trecho transcrito da resposta de Lina

[19] [2]	*Eu acho que o Pensamento Algébrico, ele é uma das estruturas cognitivas que atravessa toda a Matemática.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

Quadro 11 – Trecho transcrito da resposta de Carol

[11] [12] [13]	*Pensamento Algébrico seria essa ideia de pensar, desenvolver um raciocínio, um modo de pensar que possibilite algum tipo de generalização, ou de descoberta de um elemento, por exemplo, de uma sequência sem ficar contando de um em um.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

No Quadro 10, Lina revelou elementos do KoT – fundamentos, em particular do conhecimento sobre as dimensões do Pensamento Algébrico ([19-20]), destacando que o PA permeia e estrutura a Matemática , resposta que vai ao encontro das considerações de Blanton e Kaput (2005) sobre o PA. No Quadro 11, Carol evidenciou aspectos do KPM – processos associados à resolução de problemas como forma de fazer Matemática ao mencionar um tipo de pensamento que permite a generalização ([11-13]) — generalização do termo geral da sequência que possibilita encontrar qualquer valor da sequência ([13]). A fala se enquadra nos dizeres de Mason (1996) sobre a generalização ([11-12]) e nas explicações de Ponte, Branco e Matos (2009) sobre os elementos desconhecidos ([12-13]).

Os Quadros 12 e 13 apresentam respostas à pergunta "*Você considera que existe diferenças entre o Pensamento Algébrico e a Álgebra?* ".

Quadro 12 – Trecho transcrito da resposta de Lina

[21] [22] [23]	*Então, acho que sim* [...]. *Não, eu não sei pontuar a diferença. Intuitivamente me parece que sim. Por que o que eu acho que o Pensamento Algébrico é muito mais amplo do que Álgebra. Álgebra é um conjunto de técnicas.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

Quadro 13 – Trecho transcrito da resposta de Carol

[14] [15] [16] [17]	*Eu acho que existe, mas eu não tenho clareza* [...]. *Eu acho que Pensamento Algébrico é este modo de pensar em busca da generalização, e a Álgebra seria efetivamente a tarefa, a atividade, ou o problema que seria solucionado, especificamente por meio de uma expressão algébrica, por exemplo.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018).

No Quadro 12, embora Lina tenha citado uma diferença entre PA e Álgebra ([21]), disse não saber pontuar exatamente no que essas temáticas se diferenciam ([21]), indicando que o PA é mais amplo que a Álgebra, pois ela considera que pensar algebricamente é algo mais abrangente do que um composto de técnicas ([21-23]). No Quadro 13, Carol também mencionou considerar a existência de uma diferenciação entre o PA e a Álgebra ([14]), mas ressaltou não estar muito certa sobre essa possível distinção ([14]). A resposta de Carol retomou as “significações” que a entrevistada atrelou ao PA e à Álgebra, revelando elementos do KoT – definição de PA ([15]) e do KoT – definição de Álgebra ([15-17]). Assim, para Carol, enquanto na Álgebra se tem um problema, e, para resolvê-lo, você tem uma expressão algébrica, no PA se tem um modo de pensar que busca a generalização. Essas “significações” são consideradas por Carol como um provável diferencial entre o PA e a Álgebra.

5. Considerações Finais

Aqui apresentamos e discutimos os conhecimentos revelados por formadoras de PEM sobre alguns aspetos da Aritmética, da Álgebra e do PA. Esse movimento nos permitiu melhor entender os possíveis elementos constituintes do conhecimento especializado do formador de PEM.

As formadoras revelaram deter conhecimentos mais concisos sobre a Aritmética e a Álgebra (Álgebra Escolar), determinando as diferenciações entre estes campos da Matemática. Os conhecimentos sobre o Pensamento Algébrico não se mostraram tão sólidos quanto os da Aritmética e da Álgebra, e isso se refletiu no estabelecimento de distinções entre Álgebra e Pensamento Algébrico. As noções de generalidade permeiam as falas de Carol, quer vinculando essa característica à Álgebra, quer referenciando-a ao tratar do PA. Já Lina expressou apenas a ideia de que o PA é mais amplo que a Álgebra, sem especificar as particularidades dessa amplitude. Assim, Lina afirmou não conseguir pontuar uma diferenciação, e Carol articulou que a generalização faria parte do PA e as tarefas a serem solucionadas seriam elementos da Álgebra. Embora ambas tenham assumido que existem diferenças entre Álgebra e PA, não apresentaram explicitamente um conjunto de aspetos que os distinga. A complexidade de estabelecer uma diferenciação entre essas duas temáticas é citada por Kieran et al. (2016).

Os conhecimentos revelados por Lina e Carol (formadoras de PEM) centram-se em elementos que se relacionam às definições de Aritmética, Álgebra e PA (KoT – definição) e nos fundamentos matemáticos dessas definições (KoT – fundamentação das dimensões da Aritmética, da Álgebra e do PA). Também foram evidenciados pelas formadoras: os aspectos de conhecimento referentes aos processos e às estratégias de resolução de problemas (KoT – procedimentos e de suas propriedades numéricas e algébricas); a importância e o significado dos símbolos (KPM – papel dos símbolos e da linguagem formal, específica da sintaxe matemática); as representações numéricas — as operações matemáticas e as representações algébricas —, as letras, as fórmulas, as expressões algébricas, entre outros pontos (KoT – registros de representação); as questões de generalização como possíveis processos de resolver os problemas, a fim de produzir expressões matemática (KPM – processo associado à resolução de problemas como forma de fazer Matemática) e possíveis conexões intramatemáticas (KSM – conexões auxiliares).

Esses conhecimentos evidenciados fazem parte de um conjunto de especificidades constituintes do conhecimento matemático especializado do formador de PEM. É essencial, ainda, ao formador de PEM deter um conhecimento de PA que possibilite desenvolver o conhecimento especializado do PEM no âmbito do Pensamento Algébrico (CONTRERAS et al., 2017; RIBEIRO, 2016). Nessa direção, pontuamos a importância e a necessidade de aprofundamento nas discussões sobre o PA. Sua inserção na BNCC (BRASIL, 2018) requer agora do PEM um conhecimento matemático amplo e profundo, que permita o trabalho e o desenvolvimento desse tipo de Pensamento com os alunos. Isso, por consequência, demanda, por parte dos formadores de PEM, um conhecimento matemático especializado no âmbito do PA, o qual se caracteriza por uma natureza distinta e complementar ao do PEM.

Pensando em um trabalho futuro, que possibilite ampliar o entendimento que se tem sobre o conhecimento do formador de PEM e desenhar formas que contribuam para seu desenvolvimento, algumas questões podem ser elencadas. Quais são os elementos nucleares do conhecimento do formador de PEM sobre o PA e sobre suas dimensões? Como eles se diferenciam e se complementam? Quais os conteúdos do conhecimento do formador de PEM associados na elaboração dos diferentes tipos de tarefas para a formação do professor no âmbito do PA? Quais as diferenças e as completudes entre os conteúdos do conhecimento do formador de PEM e o conhecimento do professor no que concerne ao PA?

Agradecimentos: Este texto forma parte das atividades do projeto CONICYT PCI/Atracción de capital humano avanzado del extranjero, n.º 80170101 (Chile) e é apoiado pelo projeto n.º 2016/22557-5 da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp), por isso somos gratos a essas duas instâncias. Também agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e aos colegas de trabalho do grupo CIEspMat.

6. Referências

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 4. ed. Brasília: Ministério da Educação, 2018. 468 p.

CARRILLO, J. et al. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, [S.l.], p. 19, 2018.

CHILE. **Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media. Actualización 2009**. Santiago: Ministerio de educación de Chile, 2009. 422 p.

CONTRERAS, L. C. et al. Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. In: JORNADAS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE HUELVA, 3., 2017, Huelva. **Acta**… Huelva: CGSE, 2017. p. 11–25.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1[10], p. 78-91, mar. 1993.

GERMI, P-E. Statut des lettres et notion de variable. **Petit x**, v. 45, p. 59-79, 1997.

GOODWIN, A. L. et al. What should teacher educators know and be able to do? Perspectives from practicing teacher educators. **Journal of Teacher Education**, [S.l.], v. 65, n. 4, p. 284-302, 2014.

ITALIA. **Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'instruzione**. Roma: Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca, 2012. 68 p.

KAPUT, J. J. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. In: FENNEL, S. (Ed.). **The nature and role of algebra in the K-14 curriculum**: proceedings of a national symposium. Washington: National Research Council: National Academy Press., 1998. p. 25-26.

KIERAN, C. Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: a fundamental path to developing Early Algebraic Thinking. In: KIERAN, C. (Org.). **Teaching and learning algebraic thinking with 5- to -12 year - olds**: the global evolution of an emerging field of research and practice. [S.l.]: Springer, 2018. p. 79-105.

______. The learning and teaching of school Algebra. In: GROUWS, D. (Org.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 390-419.

KIERAN, C. et al. Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching. In:INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 13., 2016, Hamburg. **Anais**... Hamburg: Springer, 2016. p. 1-42.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 2001. 176 p.

LITOLDO, B. F.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado do formador de professores que ensinam matemática: primeiras reflexões sobre a álgebra e o pensamento algébrico. In: ENCONTRO MATO-GROSSENSE DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA, 1., 2018, Tangará da Serra. **Anais**... Barra do Bugres: Sbem, 2018. p.15.

MASON, J. Expressing generality and roots of Algebra. In: BERNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Org.). **Approaches to Algebra**. Dordrecht: Springer, 1996. v. 18. p. 65-86.

MELLONE, M. The influence of theoretical tools on teachers’ orientation to notice and classroom practice: a case study. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 14, n. 4, p. 269-284, 2011.

MELLONE, M.; JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M. Mathematics educator transformation(s) by reflecting on student’s non-standard reasoning. In: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 9., 2015, Prague. **Proceedings**... Prague: Charles University, 2015. p. 2874-2880.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

PORTUGAL. **Programa e metas curriculares matemática - Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, 2013. 118 p.

RADFORD, L. Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In: 35TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 35., 2011, Ankara. **Proceedings**... Bochum: PME, 2011. p. 17-24.

RIBEIRO, M. **Das generalidades às especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática**: metodologias na conceitualização (entender e desenvolver) do conhecimento interpretativo. Brasil: Sbem, 2018.

______. Tareas para alumnos y tareas para la formación: discutiendo el conocimiento especializado del profesor y del formador de profesores de matemáticas. In: JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 20., 2016, Valparaíso. **Actas**... Valparaíso: Sochiem, 2016. p. 31-39.

RIBEIRO, M.; CARRILLO, J.; MONTEIRO, R. Cognições e tipo de comunicação do Professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, México, v. 15, n. 1, p. 93-121, 2012.

RIBEIRO, M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Interpreting students’ non standard reasoning: insights for mathematics teacher education practices. **For the Learning of Mathematics**, v. 36, p. 8-13, 2016.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, [S.l.], v. 22, p. 1-36, 1991.

STAKE, R. E. Case studies. In: Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. (Ed.). **Handbook of qualitative research**. London: Sage Publications, 2000. p. 435-454.

SUPERFINE, A. C.; LI, W. Exploring the mathematical knowledge needed for teaching Teachers. **Journal of Teacher Education**, London, v. 65, n. 4, p. 303-314, 2014.