COINSPIRAÇÃO
Revista dos Professores que Ensinam Matemática

Uma Proposta de Modelagem Matemática com Alunos com Deficiência Visual

Débora Kézya Brasileiro Cardoso[1]
Escola Estadual Manoel Soares Campos

Edson Pereira Barbosa[2]
Universidade Federal de Mato Grosso

RESUMO

A experimentação e contextualização são cada vez mais demandadas como formas de constituir processos de aprendizagem significativos, mas ainda persiste a discussão a respeito de como deve ser a formação inicial do professor capaz de conduzir tais processos a alunos em situação de inclusão. Nessa perspectiva, esse trabalho tem como objetivo investigar o potencial da modelagem para o aprender matemática e aprender a ensinar matemática a alunos com deficiência visual na formação inicial de professores. Para isso, adotando uma metodologia qualitativa na perspectiva da pesquisa-ensino, investiga-se e analisa-se a proposta de condução de um processo de modelagem do cálculo do volume de tanque elipsoidal a um aluno com deficiência visual matriculado numa disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Como resultado observamos que o aprender a modelar e o aprender a ensinar por meio da modelagem são processos diferentes, mas potentes se tematizados de forma conjunta ou articulada na formação inicial.

Palavras-chave: Formação de Professores; Cálculo Integral; Recurso didático. Elipsoide. Educação Especial.

A Proposal For Mathematical Modeling With Visually Impaired Students

ABSTRACT

Experimentation and contextualization are increasingly required as ways of establishing significant learning processes, but the discussion persists regarding what the initial training of teachers capable of conducting such processes for students in situations of inclusion should be. From this perspective, this work aims to investigate the potential of modeling for learning mathematics and learning to teach mathematics to students with visual impairments in initial teacher training. To this end, adopting a qualitative methodology from a research-teaching perspective, we investigate and analyze the proposal to conduct a modeling process for calculating the volume of an ellipsoidal tank for a student with visual impairment enrolled in a Differential and Integral Calculus I course. As a result, we observed that learning to model and learning to teach through modeling are different processes, but powerful if thematized in a joint or articulated way in initial training.

Keywords: Teacher Training; Integral Calculus; Teaching resource. Ellipsoid. Special Education.

[1] Licenciada em Ciências Naturais e Matemática; Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT). Professora de Matemática; Escola Estadual Manoel Soares Campos (SEDUC), Cláudia, Mato Grosso, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Dom Aquino Corrêa, 492, CEL celular, centro, Cláudia, Mato Grosso, Brasil, CEP: 78540-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7186-4322. Lattes: https://lattes.cnpq.br/6972375813614851. E-mail: deboracardosomt@gmail.com.

[2] Doutor em Educação Matemática (UNESP). Professor na Universidade Federal de Mato Grosso, Campus Universitário de Sinop. Sinop, Mato Grosso, Brasil. Endereço para correspondência: Rua das Primaveras, 5253, Jardim Primavera, Sinop (MT), Brasil, CEP: 78550-412. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5418-009X. Lattes: http://lattes.cnpq.br/3184651096945519. E-mail: edson.barbosa@ufmt.br.

Una Propuesta De Modelización Matemática Con Estudiantes Con Discapacidad Visual

RESUMEN

La experimentación y la contextualización son cada vez más requeridas como formas de establecer procesos de aprendizaje significativos, pero aún persiste la discusión respecto de cuál debe ser la formación inicial de docentes capaces de conducir tales procesos para estudiantes en situaciones de inclusión. Desde esta perspectiva, este trabajo tiene como objetivo investigar el potencial de la modelización para el aprendizaje de matemáticas y el aprendizaje para enseñar matemáticas a estudiantes con discapacidad visual en la formación inicial docente. Para ello, adoptando una metodología cualitativa desde una perspectiva investigación-docencia, investigamos y analizamos la propuesta de realizar un proceso de modelación para el cálculo del volumen de un tanque elipsoidal para un estudiante con discapacidad visual matriculado en un curso de Cálculo Diferencial e Integral I. Como resultado, observamos que aprender a modelar y aprender a enseñar a través del modelado son procesos diferentes, pero poderosos si se tematizan de manera conjunta o articulada en la formación inicial.

Palabras clave: Formación de Profesores; Cálculo Integral; Recurso didáctico. Elipsoide. Educación Especial.

INTRODUÇÃO

As práticas docentes do dia a dia dos professores precisam ser motivadoras e instigantes, para provocar no aluno um novo olhar e um pensar 'original' sobre o conhecimento que está sendo adquirido por ele. Isso leva o docente a estar em permanente busca por novas experiências didáticas que proporcionem aos envolvidos (alunos e professores) satisfação, aprendizagem significativa e contextualizada para alunos e professores. O desafio de repensar as necessidades de modificação na prática educativa se torna mais premente e labiríntico ao colocar em discussão o processo de inclusão de estudantes com necessidades educacionais específicas no sistema regular de ensino Ferreira e Guimarães (2003), Barreto; Banhos; Santos; Barbosa (2020), Cardoso; Barbosa; Banhos; Santos (2021), Uliana e Mól (2021), Galvão; Rehfeldt; Schuck (2021), Barreto e Barbosa (2022).

Para lidar com a complexidade das demandas profissionais docentes segundo D'Ambrósio (1998), é necessário fazer outro professor, formado de outro modo, que seja capaz de renovar os seus conhecimentos e se conscientize de que o seu papel tem um espectro de atuação muito amplo. Em relação a uma proposta de escola inclusiva, Ferreira e Guimarães (2003) enfatizam que é preciso pensar como os professores devem ser efetivamente capacitados para transformar sua prática educativa visando atender as demandas particulares da diversidade de seus estudantes.

Considerando que a formação inicial deve além de fornecer consistente formação matemática, prover condições para que os futuros docentes desenvolvam capacidade de desenvolver ações educativas a partir de problematização e experimentações baseadas em situações reais visando atender demandas particulares da diversidade de seus possíveis alunos, neste trabalho procuramos investigar uma proposta de formação inicial de professores de matemática, na qual aluna de graduação e professor universitário se engajam numa atividade de conhecer e aprender resolver problemas por meio da modelagem matemática, conhecer e refletir o aprender a ensinar por meio da modelagem matemática numa perspectiva de educação inclusiva.

Como postura metodológica, no contexto da disciplina de Tendências IV do curso de licenciatura em Ciências Naturais e Matemática - Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) campus universitário de Sinop, adotamos a perspectiva da pesquisa-ensino (Penteado e Garrido (2010), Zaidan, Rehfeldt e Schuck (2021)), na qual a partir de um problema – determinar, por meio da modelagem matemática, o volume de líquido em um tanque elipsoidal com a participação de um aluno com deficiência visual – foi desenvolvido sistematizado, analisado no sentido de compreender e identificar limites e as potencialidades dessa prática ‘inovadora’.

O presente artigo está organizado de modo que, com base em revisão bibliográfica, discutimos a relação labiríntica entre formação de professores, modelagem matemática, problematização, contextualização e inclusão no contexto educacional (Ferreira e Guimarães (2003), Barbosa (2004), Burack (2004, 2010), Argüello (2005), Biembengut (2009, 2014, 2019), Bassenezi (2014), Barreto; Banhos; Santos; Barbosa (2020), Uliana e Mól (2021), Zambiasi; Kreff; Santana (2021), Barreto e Barbosa (2022). Em seguida, relatamos de forma coautoral, aluna e professor, a experiência de uma formanda do curso de licenciatura em ciências naturais e matemática ao se propor a vivenciar o processo de exercitar modelagem matemática à medida que procurar construir alternativas para ensinar modelagem matemática a um aluno cego.

Por fim, tecemos breves considerações analíticas nas quais observamos o potencial da modelagem matemática como metodologia de ensino propiciar condições para ampliação do repertório matemático, docente inclusivo e, consequentemente, conciliar aspectos da formação específica e pedagógica na formação inicial de professores de matemática.

FORMAÇÃO DE PROFESSORES, MODELAGEM MATEMÁTICA E INCLUSÃO: UM LABIRINTO

A utilização do contexto ou contextualização para atividades de sala de aula não busca só observar a ocorrência de um fenômeno, mas sim, problematizar e provocar uma discussão acerca do que está sendo percebido pelos alunos envolvidos na atividade, propiciar condições para que eles reflitam e exponham suas ideias, opiniões e questionamentos a respeito da atividade.

Nosso entendimento é o de que a contextualização depende de um processo de problematização constituído a partir de apreensões particularizadas e desenvolvidas com vistas a atender as demandas específicas de um grupo em contexto (prático ou teórico) delimitado. Assim, quem avalia e arbitra se algum processo faz sentido, é significativo ou se é contextualizado são os sujeitos envolvidos na atividade.

Consideramos, com relação a esse aspecto, que a prática em curso de formação inicial de professores, deve conduzir a imersão do futuro professor nos modos considerados legítimos da produção de significados do professor investigador. O potencial dessa postura se amplia, à medida que o conhecimento científico e o modo considerado legítimo de ensinar o conteúdo são estudados a partir de questões que o professor em formação indica. Argüello (2005) observa que este exercício pode partir da problematização do conhecimento 'morto' e, segundo Barbosa (2022) se constituir significativo com o transitar entre diferentes modos de produção de significados considerados legítimos (pela escola, pela academia, pela rua).

Argüello (2005) distingue a Ciência Viva: processo criativo, que produz resultados, conhecimentos, que foram ou irão ser assimilados pela humanidade; da Ciência Morta:

> Que pode ser acumulada em prateleiras de bibliotecas, em arquivos digitais, na memória do povo: são leis, princípios, teoremas, demonstrações, teorias. São os restos do processo, as cinzas de uma fogueira que podem tornar-se novamente chamas, processo. Estas cinzas podem também permanecer frias, mortas, estáticas, classificadas e arquivadas por longos períodos, talvez para sempre. (Argüello, 2005, p. 30)

Para este autor fazer ciência é um processo construtivo e, no processo de educação científica, a ciência morta é considerada como material de construção para reinvenção da ciência em contexto restrito.

> O processo de fazer ciência é um processo construtivo, e como tal, precisa de material de construção, de nutrientes, de combustíveis. Uma boa parte deste material é fornecida pelos arquivos, pelos depósitos onde descansa a Ciência Morta. Ciência Morta, mas útil, como as cinzas do incêndio no cerrado. (Argüello, 2005, p. 30).

Nessa perspectiva consideramos o problema do cálculo do volume do tanque elipsoidal uma situação com potencial de reacender, no grupo restrito da sala de aula, as chamas e por meio do processo produzir resultados, conhecimentos, que podem ou irão ser assimilados pela comunidade de educadores matemáticos.

Em geral, ao observar e problematizar um fenômeno há necessidade de uma organização dessa problematização e, segundo Skovsmose (2000), a modelagem matemática está relacionada a problematização, questionamentos, pesquisas, buscando escolher, construir, manusear material e analisar.

Nesse sentido, Barbosa (2004) destaca que a problematização se refere ao ato de criar perguntas e/ou problemas e a modelagem matemática à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas e que "ambas as atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo." (Barbosa, 2004, p. 3)

Para Burak (2004) a modelagem matemática envolve uma estratégia integral, haja vista ela, em geral, parte de tema escolhido a partir de manifestação e participação do aluno, exigindo do professor uma nova postura, o qual deve se colocar como mediador. Na perspectiva desse autor, nessa metodologia, o ensino e a pesquisa são inseparáveis, proporcionando, ainda, a interação entre os alunos.

Biembengut (2014, p. 21), corroborando com essa perspectiva sugere que a modelagem seja desenvolvida como um processo de pesquisa, no qual o processo de construção de modelos não utiliza apenas do cotidiano, mas sim de distintas situações da vida, constituindo-se em forma de diversificar e dotar de sentido os fazeres matemáticos no âmbito escolar. segundo essa autora, Modelagem é o processo de pesquisa envolvido na elaboração de modelo de qualquer área do conhecimento, cuja essência emerge quando alguma dúvida genuína ou circunstância instigam os envolvidos a encontrar uma melhor forma de alcançar uma solução, descobrir um meio de compreender, solucionar, alterar, ou ainda, criar ou aprimorar algo.

Com base no exposto, consideramos que a problematização e a contextualização por meio da modelagem matemática apresentam elementos com potencial de propiciar condições favoráveis ao desenvolvimento e a obtenção do conhecimento durante a realização de uma atividade experimental amplia-se as condições para o estabelecimento de relação entre o tema em discussão em sala de aula, essa associação contribui para que o aluno observe outros modos de produzir conhecimento, os quais, em se tratando de professores em formação tem potencial para ampliar seu repertório a respeito de como o ensino pode ser organizado.

Nesse aspecto, o processo de modelagem matemática como prática de pesquisa, no contexto escolar e ou da formação de professores constitui com os alunos um ambiente propício para trabalhar novas aprendizagens e para desenvolver o ensino por meio da problematização de apreensões constituídas em contexto determinado.

Para refletir a respeito de futuras ações didáticas e possíveis demandas profissionais em relação a modelagem matemática observamos que a *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) do Ensino Médio (Brasil, 2018, p. 531) ressalta que o aluno deve dispor da habilidade de utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

O processo acima descrito, está relacionado ao aprender matemática. Para a formação de professores entendemos que ter experiência com modelagem é necessário, mas não é suficiente. O professor em formação precisa, também, aprender e refletir a respeito do ensinar a modelar. Portanto, ao trabalhar modelagem matemática na formação inicial de professores temos que conciliar dois aspectos essenciais: o aprender a modelar e o aprender a ensinar a modelar. Essa observação se faz necessária porque consideramos, ser comum, que em cursos de licenciatura essas abordagens, aprender a modelar matematicamente e aprender a ensinar por meio da modelagem, ocorram em momentos, situações, disciplinas distintas e, ainda, que aprender a lidar com alunos em situação de inclusão ocorra em outra unidade curricular.

No modelo clássico de organização curricular, em uma ou mais disciplinas, geralmente ministrada por um docente com formação e experiência em matemática aplicada, ocorre a formação 'matemática profissional', situação na qual a modelagem matemática como pesquisa é um processo criativo que deve ser absolutamente original e universal e; em outra disciplina, ministrada por outro docente, geralmente com formação e experiência em educação matemática e docência na educação básica, o licenciando é convidado a perceber o potencial da modelagem matemática como metodologia de ensino, refletir a respeito da aplicação e implicações de seu uso na educação básica e, às vezes, desenvolver projetos de ensino por meio da modelagem abordando temas ou assuntos que podem fazer parte do contexto de seus futuros alunos.

No caso da modelagem no âmbito educacional, entendemos que o resultado do processo criativo deve trazer novidade para o aluno, seus colegas e professores, para o meio que o rodeia, podendo ser chamado de processo criativo de originalidade restrita e o resultado ser uma (re)descoberta. Para a formação de professores ter experiência com modelagem é necessário, mas não é suficiente. Em nosso entendimento, o professor em formação inicial precisa simultaneamente aprender a modelar, modelando, e refletir a respeito do ensinar a modelar.

Assim que iniciaram as discussões a respeito da modelagem matemática como metodologia de ensino as alunas, sensibilizadas pela experiência e ações da disciplina de estágio em educação inclusiva, questionaram a respeito de como trabalhar essa tendência com alunos em situação de inclusão.

Considerando essa demanda das professoras em formação, observamos que ao apresentar, na formação inicial, as tendências em educação matemática e inovações metodológicas na formação inicial devemos atentar para propor e efetivar ações formativas que ampliem e fortaleçam a inclusão. A partir disso, assumimos professor e alunas, o desafio de investigar, explorar e propor experiências nas quais a modelagem matemática se apresentasse como um potencial a ser empregado como estratégia de ensino para alunos com necessidades educacionais específicas.

À medida que a conversa avançou, cada aluna escolheu um tema e uma especificidade educacional. A primeira autora deste texto, apresentou preocupações em relação a inclusão de alunos com deficiência visual, entre elas, destacamos duas: a primeira, conforme exposto em Barreto e Barbosa (2022), à medida que aumenta a escolarização – anos finais do ensino fundamental, ensino médio e ensino superior – diminui a disponibilidade de materiais e relatos de experiências; a outra que, em geral, ao se tratar da inclusão de alunos cegos, são propostos materiais pedagógicos previamente adaptados, entretanto, no processo de modelagem, o objeto a ser conhecido e o ambiente de ensino não é controlado pelo professor. Haja vista que num processo genuíno de modelagem os conteúdos não são definidos previamente, "o conteúdo matemático a ser trabalhado é determinado pelos problemas levantados em decorrência da pesquisa de campo" (Burak, 2004, p. 2), negociados por professor e alunos no interior da atividade de modelagem, exigindo do docente maior competência para adaptação de materiais e recursos táteis que permitam acesso a objetos de conhecimentos matemáticos, à medida que são 'descobertos' (no sentido da originalidade restrita) por professor e aluno.

Como base nesses questionamentos foi elaborada a seguinte questão de: Como trabalhar com modelagem matemática numa turma que tem um aluno cego? E, a partir desse questionamento, foi proposto como desafio investigar, elaborar e exercitar o desenvolvimento de uma proposta pedagógica para inclusão de um aluno com deficiência visual (cego) no Ensino Superior.

A tarefa foi proposta de modo que os alunos pudessem produzir significados tanto na direção do aprender/fazer matemática como do aprender/ensinar matemática, por isso o enunciado da questão era familiar e não-usual. Familiar no sentido de que era promissora para os alunos produzirem significados, calcular o volume do tanque elipsoidal, não usual porque exigia um esforço cognitivo para a produção de significados matemáticos, mas principalmente, por permitir que a professora em formação inicial produzisse significado também na direção de se preparar para ensinar modelagem matemática a um aluno com deficiência visual, situação possível no exercício da docência.

Assim, este trabalho de pesquisa-ensino tomou como objetivo investigar, descrever e analisar uma situação na qual, uma aluna de licenciatura em matemática, auxilia um aluno cego do curso de Engenharia Agrícola e Ambiental, matriculado em Cálculo Diferencial e Integral I, a resolver o problema do cálculo do volume do tanque elipsoidal (Figura 01).

METODOLOGIA

Dada a natureza e modo de concepção da pergunta de investigação adotou-se para esta pesquisa uma perspectiva metodológica de pesquisa qualitativa na perspectiva de pesquisa-ensino. Segundo Penteado e Garrido (2010):

> Esse tipo de pesquisa é denominado "pesquisa-ensino". Ela produz mudanças nos alunos, qualificando seus processos de aprendizagem, e também no docente pesquisador, em sua prática de ensino, tornando-o mais autoconfiante, autônomo e compromissado com o que faz. Produz, ainda, conhecimentos sobre a docência. (Penteado e Garrido, 2010, p. 11-12)

Nessa perspectiva, Zaidan, Ferreira e Kawasakia (2018) destacam o potencial formativo da "pesquisa-ensino", para isso argumentam que à medida que situações reais da docência se fazem presentes na universidade e na pesquisa, promovem articulação entre diferentes profissionais, constitui um ambiente para reflexões e construção de alternativas inovadoras nas práticas docentes, na formação e na produção do conhecimento educacional.

Constituem etapas fundamentais da 'pesquisa-ensino', que os objetos de pesquisa tenham como origem demandas apresentadas pelos professores em formação, de modo que estas se transformem em objetos de pesquisa e de conhecimento sobre a própria prática e; que envolva a proposta de uma experimentação do próprio professor-pesquisador em sala de aula ou em outros espaços de seu contexto de trabalho, dá origem a produção de dados para análise e elaboração da sistematização do produto.

Para este trabalho foi constituído um sistema de registro composto por caderno de campo, registros fotográficos e vídeo gravações produzidos com uso de Smartphones, anotações no caderno de modelagem da aluna, conversas e relatório da aluna.

Nessa perspectiva conhecimento é visto como um movimento de reflexão e ação, no qual o fazer docente do próprio sujeito da pesquisa, amplia sua capacidade de enfrentar a realidade, cada vez mais diversa e complexa, tomando consciência sobre sua prática. As referências teóricas, nessa perspectiva, têm como função: potencializar o entendimento da situação que originou o problema de pesquisa e os desafios da pesquisa; organizar e pormenorizar o processo de registro, experimentação e descrição do contexto considerado; qualificar a sistematização e divulgação dos resultados.

Para a condução do processo de modelagem nos baseamos num esquema, que segundo Biembengut (2019), pode ser dividido em três etapas, denominadas e orientadas da seguinte forma: Percepção/Apreensão fase reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto a ser modelado; Compreensão/Explicação etapa dedicada formulação do modelo e resolução da situação-problema a partir do modelo formulado e; Significado/Expressão, fase dedicada a interpretar a solução, validar o modelo e expressar o processo e resultado.

Para lidar especificamente com aspectos relacionados a uma postura de educação inclusiva, a partir de Cardoso; Barbosa; Banhos; Santos (2021) procuramos, no decorrer das atividades, seguir os três princípios do Desenho Universal de Aprendizagem – DUA – (Nunes e Madureira, 2015), a saber: i) Proporcionar múltiplos meios de envolvimento ou engajamento; ii) Proporcionar múltiplos meios de representação e; iii) Proporcionar múltiplos meios de ação e expressão.

Para análise e considerações adotamos uma postura qualitativa de natureza descritiva e analítica na qual nos preocupamos em olhar para o processo e somente para o estado das coisas.

PROCESSO DE MODELAGEM

Com base ao que é apresentado no relatório da primeira autora (re)visitamos a experiência e produzimos a seguinte descrição do processo de modelagem do tanque elipsoidal, Figura 1.

Para resolução do problema, na fase de apreensão, constatamos que tanque (Figura 01) é utilizado para armazenar diferentes tipos de líquidos possui um metro e setenta centímetros (1,7 m) de largura, um metro (1 m) de altura e dois metros e quarenta centímetros (2,4 m) de comprimento. Coletamos os dados assumindo que se trata de uma elipse, com isto tomamos um ponto no centro do tanque medimos seu afastamento até a altura, e, a cada vinte centímetros, medimos as distâncias horizontais e anotamos todas as medidas produzimos as medidas especificadas no quadro 01.

De início, representamos a face do tanque no papel milimetrado (Figura 02), mas o professor fez algumas observações no sentido de lembrar que deveríamos imaginar esse trabalho com um aluno cego ou baixa visão.

Essa observação nos levou a observar que deveríamos, no plano prever uma volta ao barracão fazer uma exploração tátil dos implementos, prever uma discussão com o aluno sobre como medir, usar réguas de 50 cm para o comprimento e régua de 20 cm para marcar os distanciamentos das alturas a serem medidas.

No decorrer do processo nos preocupamos em recorrer a materiais manipuláveis para elaborar as múltiplas representações e com potencial de atender as necessidades educacionais especializadas de um aluno com deficiência visual, tais como: relevo sobre o papel milimetrado, papel Paraná, papel Laminado da cor azul e vermelho, tinta 3D, EVA liso e EVA de textura.

Figura 01 - Tanque elipsoidal

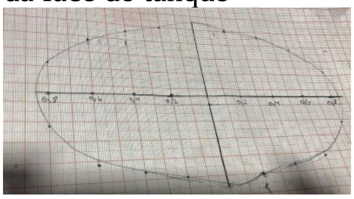
Fonte: Acervo dos autores

Quadro 01 – Medidas do tanque

Afastamento do centro/ metros	**Altura/ metros**
0,	0,9
0,4	0,83
0,6	0,65
0,8	0,35

Fonte: Elaboração dos pesquisadores

Figura 02 – Representação da face do tanque



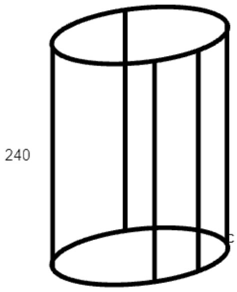
Fonte: Elaboração dos autores

Esse foi o momento em que percebemos que a cada passo da discussão sobre como modelar seria necessário observar que ocorriam, ao mesmo tempo, dois tipos de aprendizagem: um sobre como modelar e ou outro como propiciar condições para conduzir esse processo junto e com um aluno cego.

Inicialmente apreendeu-se que o volume do tanque poderia ser determinado considerando como base a elipse e a altura o comprimento do tanque, 2,4 m, figura 03. Como se o tanque estivesse com a elipse apoiada no chão. Seguindo essa ideia para estabelecer o volume do tanque basta calcular a área da base e multiplicar pelo comprimento, 2,4 m.

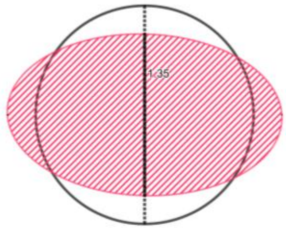
$$V_t = Area\ da\ base\ \times comprimento \quad [1]$$

Figura 03 – Representação do Tanque



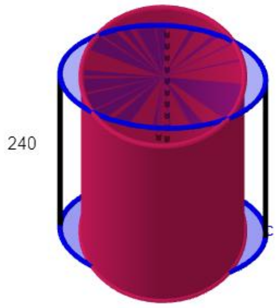
Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 04 – Representação circular e elíptica da base do tanque



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 05 – Comparação dos tanques circular e elíptico.



Fonte: Elaborado pelos autores

Inicialmente foi adotado o modelo de um cilindro, Figura 03, que cujo volume seria equivalente ao do tanque elipsoidal, como referência usou-se o método que os madeireiros da região usam para calcular volume de toras. Considerando o tanque como um cilindro cujo diâmetro da base fosse igual a média das medidas horizontal, D=1,70 m, e vertical, d=1 m.

$$V_c = \underbrace{\pi\left(\frac{D+d}{4}\right)^2}_{\acute{A}rea\ da\ base} c \quad [2]$$

Assim, substituindo os valores das medidas temos que o volume do tanque será:

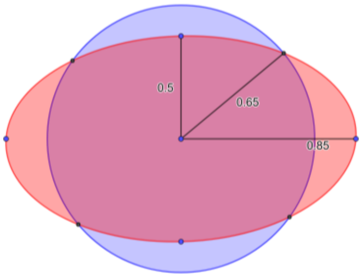
$$V_t = \underbrace{3{,}141592 \times \left(\frac{1{,}7+1}{4}\right)^2}_{\acute{A}rea\ da\ base} \times \underbrace{2{,}4}_{comprimento} \cong 3.435$$

Com esse processo de modelação tínhamos uma solução na qual a capacidade do tanque era de 3.435 litros.

Na fase de compreensão do modelo foram construídas duas representações da área da base uma no Geogebra e outra EVA com diferentes texturas, conforme Figuras 4 e 5, respectivamente.

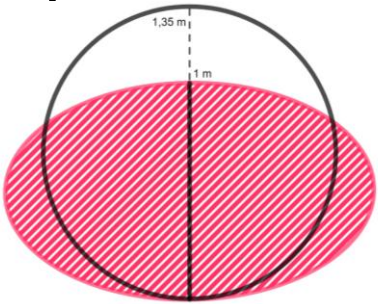
Diante dessa solução o professor questiona se o modelo atendia as características do objeto de modelação e como seria justificado o fato do tanque possuir altura igual 1 m e pelo modelo é possível calcular o volume para altura de até 1,35 m. E propõe que a circunferência e elipse sejam organizados, conforme Figuras 06, 07 e 08. Na discussão foi observado que os cálculos revelariam uma distorção muito grande ao calcular volumes intermediários, quando o tanque não estivesse completamente cheio, pois ao medir a altura a partir de zero para ambos os modelos, estaríamos considerando uma situação que pode ser representada de acordo com as figuras 07 e 08. A partir desse exercício de compreensão/Explicação do pré-modelo foi constatado empiricamente a limitação da proposta de modelo, isso mobilizou a busca de alternativa.

Figura 06 – Representação circular média e elíptica da base do tanque



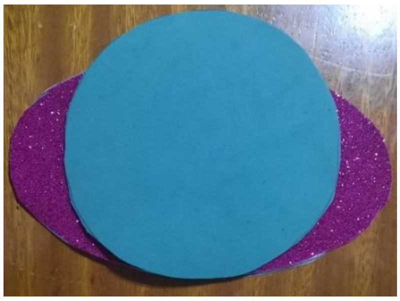
Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 07 – Representação circular e elíptica da base do tanque



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 08 – Representação tátil circular e elíptica da base do tanque



Fonte: Acervo dos autores

Na internet foi encontrado com outro modelo para a área da elipse. No qual, assim como o primeiro procura-se um círculo cuja área seja igual ou aproximadamente igual à da elipse. Ou seja, assume-se que o círculo é um caso particular da elipse. Assim, a área da elipse é igual o produto dos raios por Pi, onde a e b são os raios da elipse.

$$A_e = a \times b \times \pi \quad [3],$$

Seguindo nesta ideia o volume será a área determinada pelo produto da área da base pelo comprimento, c, do tanque. Assim, o volume do tanque será determinado por:

$$V = \underbrace{\pi \times a \times b}_{\text{Área da base eliptica}} \times \underbrace{c}_{\substack{\text{comprimento} \\ \text{do tanque}}} \quad [4]$$

No caso específico do tanque em estudo temos: $a = 0{,}85\ m$, $b = 0{,}5\ m$ e $c = 2{,}4\ m$

$$V \cong \underbrace{(3{,}1415 \times 0{,}85 \times 0{,}5)}_{\text{Área da base eliptica}} \times 2{,}4 \cong 1{,}33518 \times 2{,}4 \cong 3{,}2$$

Após constatar que esse modelo era aceitável para determinar o volume do tanque, iniciou uma busca para calcular os valores intermediários. Em seguida, no processo de compreensão/explicação, observou-se que por esse modelo teríamos medida de altura igual a 1,3 m, portanto, maior que 100 cm, ou 1 metro, altura máxima do tanque. Constatado que esse modelo apresentava as mesmas limitações do anterior e por isso, foi considerado incompatível com a situação que originou o problema e descartado.

Após avaliação dessas soluções decidiu-se percorrer outros caminhos, nos quais desde o início do processo se preocupasse com o potencial do modelo para determinar quantidades intermediárias, quando o tanque não estivesse completamente cheio.

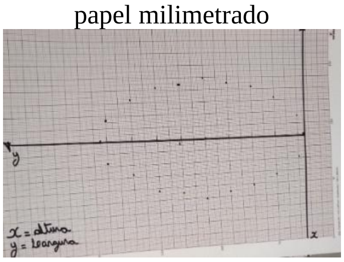
Observando as formas das figuras e inferindo uma possível diferença entre as áreas, foi retomada a observação da elipse representada no papel milimetrado, Figura 02, e em um novo movimento de apreensão, assume-se como desafio construir uma tabela na qual fosse possível determinar a quantidade de líquido no tanque dependendo da altura ocupada pelo líquido e mantendo a base na forma de elipse, decidiu-se, provisoriamente, buscar uma solução numérica.

A partir das medidas registradas e sistematizadas no Quadro 01 foram esboçadas no papel milimetrado (Figura 09) uma elipse cuja altura fosse de 1m e a cada 20cm do centro da elipse registramos os afastamentos vertical (altura) e horizontal (largura).

Reforçamos o esboço com caneta e tinta 3D, dessa forma a figura projetada permite o tatear de seu contorno, Figura 10. Além disso, construímos representações da face do tanque em EVA liso, EVA de textura, Figura 11, 12 e 14 e realizamos outras experiências de representação usando multiplano, papel Paraná, papel Laminado, canudos e cola de silicone, as quais após avaliação foram abandonadas no decorrer do processo.

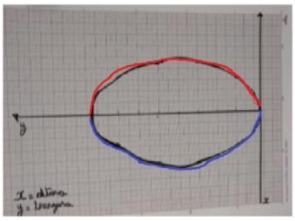
Em seguida, como antecipação para evitar a construção de duas equações uma para a parte inferior do tanque e, outra, para a parte superior do tanque reorganizamos as larguras e alturas da base do tanque como representado nas Figuras 13, 14 e 15. Observamos que a mesma representação com o contraste das cores serve a aluno baixa visão.

Figura 09 - Esboço da elipse em papel milimetrado



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 10 - Representação em Relevo



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 11 – Representação tátil

Fonte: Elaborado pelos autores

Observando o esboço da elipse na Figura 09 consideramos, que a imagem tem semelhanças com duas parábolas – figuras 10, 11, 12. A partir dessa apreensão, desenvolvemos um modelo cuja referência seria a parábola. Isso ampliou o potencial de produção de significados, haja vista que a relação entre equação quadrática e o gráfico em forma de parábola é familiar aos alunos recém ingresso no Ensino Superior, desde o Ensino Médio. Ao assumir que o tanque tem forma elíptica e este, por sua vez, é o encontro de duas parábolas, construímos modelos gráfico e algébrico para representar o volume do tanque.

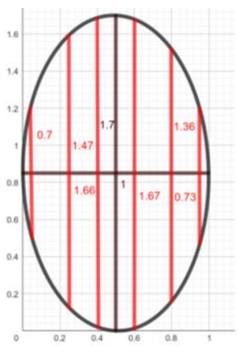
Para isso reorganizamos a disposição das medidas da figura 10, com uma mudança de eixos coordenados, passamos a representa a altura como x e a largura como y, Figura 13. Inicialmente, a partir do papel milimetrado, neste desenhamos os Eixos X e Y, sendo X = altura e Y= largura. Essa mudança tinha como finalidade o uso do software Geogebra. Em seguida, tomamos as medidas do esboço anterior e transportamos para a representação da Figura 14.

Com o esboço da parábola, figura 15, ligamos os pontos até a Abcissa (Eixo X), construímos vários trapézios. A estratégia de fragmentar a parábola em trapézios tinha como intenção aproximar a atividade ao conteúdo prescrito na ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Figura 12 – Representação tátil

Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 13 - Representação da face (base) do tanque após mudança de eixos



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 14 – Representação tátil da área particionada da base do tanque

Fonte: Elaborado pelos autores

Essa foi uma oportunidade para produzir significados para o cálculo aproximado de área usando a Regra do Trapézio,

$$V = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=0}^{n}(y_{i-1}) + y_i\right] \times 2.4 \; [5]$$

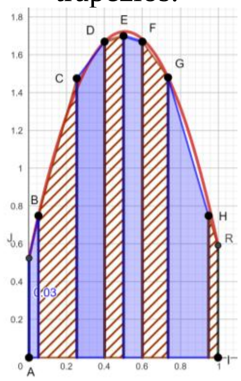
A partir desse modelo pudemos realizar um cálculo numérico aproximado, conforme a terceira linha do quadro 02.

Com esta solução numérica chegou-se a um volume total de aproximadamente 3.087 litros. Além disso, este processo permite determinar valores aproximados de volume quando o tanque não está completamente cheio.

Este modo foi considerado dispendioso, mas justificável porque tínhamos como finalidade didática produzir significados em relação ao cálculo integral, no qual o cálculo da área aproximada por trapézios (Stewart, 2013) é objeto de conhecimento relevante para a construção da noção de integral.

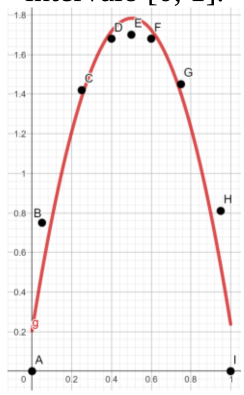
Nessa nova apreensão, procuramos representar a área da base do tanque no ambiente do Geogebra. Para isso digitamos os pontos: A(0, 0), B(0.05, 0.75), C(0.25, 1.42), D(0.4, 1.68), E(0.5, 1.7), F(0.6, 1.68), G(0.75, 1.45), H(0.95, 0.81) e I(1, 0), em seguida digitamos na janela de entrada o comando: $RegressãoPolinomial(\underbrace{\{A,B,C,D,E,F,G,H,I\}}_{listadepontos},\ \underbrace{2}_{Grau}\ )$ e obtivemos a função $f(x) = -6.25x^2 + 6.28 + 0.2$. Depois determinamos uma função limitada ao intervalo de interesse, entre zero e um, $g(x) = -6.25x^2 + 6.28 + 0.2, (0 \leq x \leq 1)$, Figura 16.

Figura 15 – Representação da área da base do tanque em trapézios.



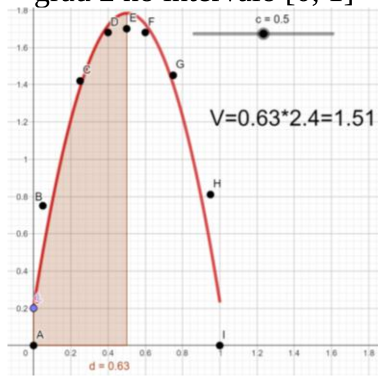
Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 16 – Regressão polinomial de grau 2 no intervalo [0, 1].



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 17 – Integral da área sob a curva polinomial de grau 2 no intervalo [0, 1]



Fonte: Elaborado pelos autores

Em seguida com um controle deslizante, c, e o comando, Integral Numérica(g,0,c), obtivemos a área sob a curva no intervalo [0, c], Figura 17, e adequado para volumes intermediário, com isso chegamos ao seguinte modelo:

$$V_c = \underbrace{k}_{Comprimento\ do\ tanque} \underbrace{\int_0^c g(x)\, dx}_{Área\ da\ base} \quad [6]$$

em que k é a medida do comprimento do tanque em metros, portanto, k=2.4

Ou ainda,

$$V_t = 2.4 \int_0^c g(x)dx \cong 2.4 \int_0^1 -6.25x^2 + 6.28x + 0.2 \ dx \quad [7]$$

Como avaliação calculamos por meio do comando $IntegralNumérica(g, 0,1)$ e obtivemos como resposta um valor da área da base do tanque igual a 1.26, o qual multiplicado pelo comprimento, 2.4, resultou em 3.03, ou seja, 3.030 litros. Resultado avaliado como aceitável, haja vista que o fabricante informa que o tanque tem capacidade para 3.000 litros.

No exercício da fase de significado/expressão, que segundo Biembengut (2019) é dedicada a interpretar a solução, validar o modelo e expressar o processo e resultado, foi realizada a comparação, Quadro 02, entre as duas estratégias, a de aproximação da área por trapézios e a da integral do polinômio de grau 2. Também foi realizada a comparação gráfica, mas ela não apresentava diferença perceptiva e não faria sentido sua adaptação a alunos com deficiência visual.

Quadro 02 – Comparação entre os volumes do tanque elipsoidal obtidos pela Regra do Trapézio e Integral do Polinômio de grau 2.

Altura (x) em m	0	0,05	0,25	0,4	0,5	0,6	0,75	0,95	1
Largura (y) em m	0	0,75	1,42	1,68	1,7	1,68	1,45	0,81	0
Volume em m^3 – Regra dos Trapézios	0	45	565	1.123	1.529	1.934	2.497	3.039	3.087
Volume em m^3 – Integral	0	40	520	1.080	1.510	1.930	2.500	2.980	3.030
Diferença: Integral – Trapézios	0	5	-55	43	19	4	-3	59	57

Fonte: elaborado pelos autores

Ainda na fase de expressão conforme o tempo foi lembrado a importância da construção de uma régua com marcações em Braille a partir do quadro 02, além disso poderia ser discutido com o aluno envolvido na atividade, outras formas de expressão considerando as tecnologias assistivas as quais ele tem acesso.

Além das soluções apresentadas neste texto, outros métodos como a Regra e Simpson e o cálculo de área aproximada por retângulo, próximo ao realizado por Galvão; Rehfeldt; Schuck (2021) foram experimentadas e discutidas, mas foram omitidas por questões de concisão, espaço para escrita e por entender que o exposto contemplaria o que é trabalhado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I no curso de Engenharia Agrícola e Ambiental.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Consideramos que neste trabalho a modelagem matemática unida à experimentação potencializaram a aprendizagem de Geometria Espacial, Geometria Analítica e Cálculo Integral, a cada passo do processo nos tornávamos atentos e críticos em relação aos objetos matemáticos e postura pedagógica, que a cada etapa do processo deveria atender a necessidade do aluno com deficiência visual.

A modelagem matemática e a iniciativa de se propor a estar com um aluno com deficiência visual nos permitiu constituir um interlocutor, que nos exigia além de pensar sobre como modelar, ponderar a respeito de como constituir e manter um espaço comunicativo, no qual o aluno cego estaria envolvido. Isto contribuiu significativamente para aguçar ideias e experimentações a respeito de materiais didáticos, escolha do processo de modelagem, zelo com a linguagem e registros, confabulações a respeito do uso de tecnologias assistivas etc. situações que ampliaram o repertório docente e matemático dos envolvidos. Pois como assinalam Uliana e Mól (2021) é importante no processo pedagógico o professor prime por materiais que proporcionem aos estudantes acesso aos conteúdos nas suas diversas representações.

Nesta análise, cabe-nos observar que a ausência do outro, do aluno cego no processo, facilitou no sentido de evitar a tensão intersubjetiva do espaço comunicativo, haja vista que os percursos exploratórios da tradução ao outro requerem uma base de negociação que permita uma composição que se assenta numa atitude de negociação. Dito de outra forma, um processo de troca, de escuta e fala, fazer, falar novamente ouvir outra vez a ser produzida pelos professores, aluno cego e, provavelmente, outros alunos. Até porque nem sempre o processo de adaptação é tranquilo ou aceito pelo aluno com deficiência visual, como bem discorrem Zaidan, Rehfeldt e Schuck (2021) e Barreto e Barbosa (2022).

As três etapas, denominadas e orientadas por Biembengut (2014, 2019): Percepção/Apreensão; Compreensão/Explicação; Significado/Expressão, com a observação do três princípios do DUA (Nunes e Madureira, 2015), a saber: i) proporcionar múltiplos meios de envolvimento ou engajamento; ii) proporcionar múltiplos meios de representação e; iii) proporcionar múltiplos meios de ação e expressão, se mostraram adequadas e pertinentes tanto para orientar o processo de modelagem como de reflexão em uma pesquisa-ensino, pois contribuem para a elaboração saberes e conhecimentos pedagógicos advindos da prática docente e adequado para o, necessário, avanço sobre a reflexão.

Por fim, expressamos a expectativa de que esta experiência, assim como serviu aos autores, tenha potencial para fomentar reflexão, contribuir com o debate e inspirar outros formadores de professores a promover e divulgar experiências que almejam conciliar, na formação inicial de professores de matemática, o ensino de conhecimentos específicos de matemática com conhecimentos pedagógicos na perspectiva de uma educação atenta a diversidade e particularidade dos alunos com compartilha o fazer educação matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARGÜELLO, C. A. Material Didático de Ciências; o material didático para o Ensino de Ciências. In: Iniciação Científica: um salto para a ciência. Salto para o Futuro – TV Escola: Programa 04. **Boletim** 11, p. 29-38, junho de 2005.

BARBOSA, E. P. Quando Matemática da Rua e Matemática da Escola se Encontram na Formação de Professores. **Perspectivas a Educação Matemática**, v. 15, p. 1-22, 2022.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 8, 2004, Recife: SBEM, 2004. 1 CD-ROM.

BARRETO, D. K. B. C.; BANHOS, L. R.; SANTOS, L. M.; BARBOSA, E. P. Material Manipulável para o Ensino de Funções Quadráticas Voltado para Alunos Deficientes Visuais. **Scientific Electronic Archives**, v. 13, p. 49-60, 2020.

BARRETO, D. B; BARBOSA, E. P. Argumentação Matemática com Alunos Deficientes Visuais. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 5, n. 4, p. 92–117, 2022.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino.** São Paulo: Editora Contexto, 2009.

BIEMBENGUT, M. S. Modelagem Matemática & Resolução de Problemas, Projetos e Etnomatemática: Pontos Confluentes**. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.7, n.2, p.197-219, 2014.

BIEMBENGUT, Maria Salete. **Modelagem nos anos iniciais do ensino fundamental: ciências e matemática.** São Paulo: Editora Contexto, 2019.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). **Educação é a Base**. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem Na Educação Matemática**, Blumenau, v. 1, n. 1, p.10-27, 2010.

BURAK, D. A modelagem matemática e a sala de aula. In: **I EPMEM – I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática**, 2004. Anais ...Londrina, 2004.

CARDOSO, D. K. B; BARBOSA, E. P.; BANHOS, L. R; SANTOS, L. M. Ressonância Colaborativa, Desenho Universal para Aprendizagem (DUA) e Coensino: uma experiência de promoção de inclusão escolar. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática**, Mato Grosso, v. 4, p. e2021007, 2021.

D´AMBROSIO, U. **Etnomatemática**. 5. ed. São Paulo: Ática, 1998.

FERREIRA, M.E.C.; GUIMARÃES, M. **Educação inclusiva**. Rio de Janeiro: DP& A, 2003

GALVÃO, L. M., REHFELDT, M. J. H., SCHUCK, R. J. Modelagem Matemática: uma proposta de ensino para alunos deficientes visuais. **Educação Matemática Debate**, vol. 5, núm. 11, 2021.

NUNES, Clarisse; MADUREIRA, Isabel. 2015. **Desenho Universal para a Aprendizagem: Construindo práticas pedagógicas inclusivas**. Da Investigação às Práticas, 5(2):p.126-143. Disponível em: https://doi.org/10,25757/INVEP.v512.84

PENTEADO, H. D.; GARRIDO, E. **Pesquisa-ensino:** a comunicação escolar na formação do professor. São Paulo: Paulinas, 2010.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários de investigação. In: **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), nº 14, p. 66-91, 2000.

STEWART, James. **Cálculo**, volume I; São Paulo: Cengage Learning, 2013.

ULIANA, M. R.; MÓL, G. S. Desenvolvimento de Materiais Didáticos para o Processo de Ensino de Matemática para Estudantes com Deficiência Visual. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática**, Mato Grosso, v. 4, p. e2021002, 2021.

ZAIDAN, S.; FERREIRA, M. C. C.; KAWASAKI, T. F. A Pesquisa da Própria Prática no Mestrado Profissional. **Plurais - Revista Multidisciplinar**, Salvador, v. 3, n. 1, p. 88–103, 2018

ZAMBIASI, J. M; KREFF, J. C. M; SANTANA, G. F. S. Modelagem Matemática e Cálculo I: Uma Abordagem Prática na Irrigação dos Campos de Futebol. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática**, Mato Grosso, v. 4, p. e2021011, 2021.

Histórico
Submetido: 18 de dezembro de 2024.
Aprovado: 17 de abril de 2025.
Publicado: 23 de abril de 2025.

Como citar o artigo - ABNT
CARDOSO, D. K. B; BARBOSA, E. P. Uma Proposta de Modelagem Matemática com Alunos com Deficiência Visual. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática** (MT), v. 8, e2025005, 2025. https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172.e2025005