Sociedade Brasileira de Educação Matemática Regional – Mato Grosso

COINSPIRAÇÃO
Revista de Professores que ensinam Matemática
v. 1, n. 1, Janeiro a Junho 2018.
http://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/index.php/coinspiracao

HEURÍSTICA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ASPECTOS DO ENSINO *SOBRE* RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

PROBLEM SOLVING HEURISTIC: ASPECTS OF TEACHING ABOUT MATHEMATICS PROBLEMS SOLVING

Nilton Cezar Ferreira[1]

Júlio César Santos Pereira [2]

Glen César Lemos [3]

Resumo

Este trabalho apresenta resultados de uma pesquisa, desenvolvida pelo primeiro autor, e com a colaboração dos coautores no processo de compreensão dos dados coletados e apresentação dos resultados. A pesquisa se deu durante um curso de Heurística de Resolução de Problemas de Matemática, proposto como uma *prática profissional* de um curso de licenciatura em Matemática de uma Instituição Pública de Ensino Superior. Heurísticas de Resolução de Problemas foi tratada, neste trabalho, como a busca em compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as *operações mentais*, típicas desse processo, que tenham utilidade. Para isso, foram promovidas situações capazes de evidenciar essas operações mentais para que os próprios estudantes pudessem conhecer seus raciocínios durante a resolução de um problema de matemática. Diversos resultados se evidenciaram como: certa homogeneidade em alguns aspectos de pensamentos; a falta de iniciativa coerente, de alguns estudantes, para um pensamento ativo e reflexivo, dentre outros.

Palavras-chave: Resolução de problemas, Ensino e aprendizagem, Operações mentais.

Abstract

This work presents results of a research developed by the first author and with the collaboration of the coauthors in the process of understanding the data collected and presenting the results. The research was carried out during a course of Mathematical Problem Solving, proposed as a professional practice of a degree course in Mathematics of a Public Institution of Higher Education. Problem Solving Heuristics was treated in this paper as the quest to understand the problem solving process, particularly the mental operations, typical of that process, that have utility. To this end, situations were promoted to highlight these mental operations so that the students themselves could know their reasoning during the resolution of a mathematical problem. Several results were evidenced as: certain homogeneity in some aspects of thoughts; the lack of coherent initiative of some students, for an active and reflective thought, among others.

Keywords: Problem solving, Teaching and learning, Mental operations.

[1] Doutor em Educação matemática e Docente do Instituto Federal de Goiás/campus Goiânia. niltoncezar@gmail.com
[2] Aluno do Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática. Instituto Federal de Goiás/Campus-Jataí. juliocesar_mp3@hotmail.com
[3] Doutor em Educação matemática e Docente do Instituto Federal de Goiás/campus Goiânia. glenlemos@gmail.com

1. Introdução

Segundo Morais e Onuchic (2014), na passagem do século XIX para o século XX, as teorias pedagógicas eram ancoradas na teoria psicológica intitulada Teoria da Disciplina Mental (TDM), desenvolvida pelo psicólogo alemão Christian Wolff, em 1740. Em 1902, Thorndike e Woodworth, apresentaram elementos bastante fortes que contrariaram essa teoria, dando origem a Teoria do Conexionismo. Porém, foi na década de 1930 que a Resolução de Problema se constituiu como uma proposta para o ensino e aprendizagem de matemática, pelo matemático e pesquisador George Polya, apresentada por ele no grande clássico *How to solve it* traduzido para o português por – "A arte de resolver problemas".

Nesse livro, Polya faz um estudo sobre Resolução de Problemas, discutindo estratégia para se resolver problemas com o objetivo de fazer com que professores e alunos se tornem bons resolvedores de problemas. E, ainda, apresenta um novo significado para a palavra *heurística* com o propósito de entender as operações mentais de um indivíduo, ocorridas durante a resolução de um problema de matemática.

Nossa pesquisa, ocorrida durante a aplicação de uma *prática profissional* em um curso de formação inicial de professores de matemática, foi desenvolvida nessa linha proposta por Polya. Em 11 encontros de uma hora e meia cada, foram propostos problemas com o objetivo de investigar as operações mentais, dos estudantes, durante o processo de entendimento e resolução (ou tentativa de resolução) desses problemas. O objetivo foi o de levar os próprios estudantes a entenderem como eles pensavam frente à a um problema; confrontar essa forma de raciocínio com as teorias apresentadas por Polya (2006) e por outros trabalhos como Engel (1998) e Larson (1983); e, levar os estudantes a diagnosticarem suas dificuldades para resolver problemas e, a partir desse entendimento, se desenvolverem cognitivamente e, consequentemente, serem capazes de produzir novas estratégias para a resolução de problemas.

Consideramos nosso trabalho relevante, pois trata de questões importantes para a formação do professor de matemática. Além possibilitar a promoção do desenvolvimento cognitivo dos estudantes, pode promover uma *formação de conteúdo* – uma das formações importantes apontada por Shulman (1986) e, ainda, evidenciar a necessidade de aprofundamento em questões como o uso *signos como mediador*, melhoria do discurso do estudante diante de argumentações, etc. Nesse sentido, esperamos que nosso trabalho, além dos resultados apresentados, possa servir de reflexão e apoio à novas pesquisas que buscam melhorias no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

2. Referencial Teórico

Para apresentar os principais referenciais teóricos usados no nosso processo de investigação, dividimos este tópico em duas partes: A Resolução de Problemas no Contexto Didático-Pedagógico e Heurísticas de Resolução de Problemas. Na primeira, apresentamos um resumos da discussão de alguns dos principais teóricos sobre uso da resolução de problemas em sala de aula. Na segunda, é evidenciado o significado dado a Heurística de Resolução de Problemas e como essa heurística se constitui e se estabelece no processo de ensino e de aprendizagem.

2.1 A Resolução de Problemas no Contexto Didático-Pedagógico

Schroeder e Lester, em seu artigo de 1989, *Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving*, apontam três formas de utilizar a resolução de problemas, em sala de aula, para a construção do conhecimento matemático: ensino *sobre* Resolução de Problemas, ensino *para* resolução de problemas e ensino *através* da Resolução de Problemas.

O ensino *sobre* resolução de problemas, de acordo com Schroeder e Lester (1989), refere-se ao modelo apresentado por Polya em seu livro *How to solve it*, traduzido para o português como *A Arte de Resolver Problemas*, ou uma variação dele. Esse livro é considerado um clássico da resolução de problemas, possui diversas edições e reimpressões e, neste artigo, apoiamo-nos na sua edição de 2006. Nessa forma de ensinar (*sobre resolução de problemas*), o foco é desenvolver as habilidades dos estudantes em resolver problemas. Para isso, Polya apresenta quatro fases que ele afirma serem usadas por especialistas em resolução de problemas, que são: entender o problema, idealizar um plano, executar o plano e observar o caminho inverso usado na resolução do problema. Com um trabalho efetivo e constante, acredita-se que o aluno se tornará um bom resolvedor de problemas. Porém, para alcançar esse objetivo, o professor precisa, adicionalmente, ensinar *estratégias* ou *heurísticas*, que servirão para visualizar ou que serão escolhidas para auxiliar na execução do plano.

Segundo Schroeder e Lester (1989), “ao ensinar *para* resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a Matemática ensinada pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros ou não rotineiros”. Embora a aquisição de conhecimento seja importante, o essencial é que o aluno seja capaz de utilizá-la. Ao ensinar nessa abordagem, o professor apresenta o conteúdo aos alunos dando uma definição e suas propriedades, e os principais teoremas, às vezes, são enunciados de maneira simplificada e sem demonstração.

Após isso, coloca-se vários exemplos tentando abranger a maior quantidade de situações possíveis para que o aluno seja capaz de resolver qualquer problema do referido assunto. O professor que utiliza essa abordagem não está preocupado em desenvolver as habilidades do aluno para resolver problemas de matemática.

Alguns educadores matemáticos tem criticado essa abordagem acreditando que o foco principal dela é que o aluno seja capaz de reproduzir o que é feito pelo professor, durantes os procedimentos usados em sala de aula, e adaptar tais procedimentos para o maior número possível de situações que possam ocorrer. E, além disso, nas avaliações dos conteúdo ensinados, o professor cobra a reprodução, colocando nas avaliações, exercícios praticados em sala de aula e, muitas vezes, nem mesmo altera os dados desses exercícios. Porém, essa forma de trabalho pode ser feita de outra maneira de forma a trazer um grande benefício para o processo de ensino e aprendizagem de matemática.

De fato, sempre que o estudante aprende um novo conteúdo de matemática, é importante que ele trabalhe bastante esse conteúdo para que ele não esqueça o que aprendeu e, ainda, melhore seu aprendizado, ou seja, aperfeiçoe o significado produzido sobre esse conteúdo ou ressignifique. E isso pode ser feito por meio de um processo de repetição, resolvendo diversos exercícios de fixação de conteúdo. Além disso, o professor poderá utilizar essa abordagem para mostrar, ao aluno, alguma utilização da matemática que ele aprendeu através de aplicações em problemas, ou situações-problemas, práticos ou até mesmo teóricos.

Segundo Schroeder e Lester (1989), “ao se ensinar *através* da resolução de problemas, os problemas são valorizados não apenas como um propósito para aprender Matemática, mas também como principal meio de fazer matemática”. O ensino de um conteúdo matemático, nessa abordagem, poderia começar com uma situação-problema que envolvesse ou que tivesse alguma relação direta com os conceitos relacionados aos conteúdos a serem ensinados. E, durante a resolução desse problema, por parte do aluno, o professor, agindo como mediador, leva os estudantes a conceberem algo novo – um conceito, um conteúdo, um procedimento, etc.

Eles, Schroeder e Lester, ainda afirmam que as técnicas e a aprendizagem matemática, dessa maneira, poderiam ser vistas como um movimento do concreto (que serve como uma instância do conceito ou técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica e uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos).

Essa abordagem é uma das mais defendidas atualmente por educadores e pesquisadores em Educação Matemática. Inclusive um dos maiores grupos em Resolução de Problemas no Brasil, GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, tem desenvolvido diversos trabalhos (artigos, dissertações de mestrado, teses de doutorado, etc.) nessa vertente, criando, inclusive, uma metodologia, denominada Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Nessa metodologia, o problema deve ser o ponto de partida para a construção de aprendizagem e o professor deve deixar de ser o foco da atenção, passando para o aluno a maior responsabilidade no seu processo de aprendizagem, ou seja, o estudante deve ser o coconstrutor de seu próprio conhecimento.

Para que isso possa ser alcançando, Lourdes de la Rosa Onuchic, coordenadora do GTERP, buscando auxiliar professores nesse processo, propôs um roteiro de atividades. Esse roteiro, após algumas modificações, foi apresentado em Onuchic e Allevato (2014, p.45-46). Ele sugere:

1. *Preparação do problema* **-** Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento.
2. *Leitura individual* - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
3. *Leitura em conjunto* - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
4. *Resolução do problema* - A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.
5. *Observar e incentivar* – Enquanto os alunos, em grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo.
6. *Registro das resoluções na lousa* – Representantes dos grupos são convidados a registrar,

na lousa, suas resoluções.

7. *Plenária* – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos.
8. *Busca do consenso* – Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
9. *Formalização do conteúdo* – Neste momento, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.
10. *Proposição resolução de novos problemas* – objetiva a avaliação contínua, após a etapa da formalização, novos problemas são propostos aos alunos, gerando um círculo que se configura a construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas.

2.2 Heurísticas de Resolução de Problemas

Nossa pesquisa buscou compreender, na prática, como se daria um estudo *sobre* resolução de problemas, observando as questões cognitivas envolvidas nesse processo, ou seja, discutindo heurísticas na resolução de problemas matemáticos. O dicionário Houaiss[4] apresenta heurística como sendo "a arte de inventar, de fazer descobertas; ciência que tem por objeto a descoberta de fatos". Esse mesmo dicionário coloca também um verbete para o significado de heurística no campo da Educação como "método educacional que consiste em fazer descobrir pelo aluno o que lhe quer ensinar".

Neste trabalho, que é baseado nos teóricos Polya, Engel e Larson, heurística será tratada como *heurística moderna*. Segundo Polya:

> A heurística moderna procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as *operações mentais*, típicas desse processo, que tenham utilidade. [...] Um estudo consciencioso a Heurística deve levar em conta, tanto as bases lógicas quantos as psicológicas. [...] O estudo da Heurística tem objetivos 'práticos': melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da matemática (POLYA, 2006, p. 99 e 100).

[4] Consultamos a versão online (acesso pago) endereço: https://houaiss.uol.com.br/pub/apps/www/v3-/html/index.php#1

Neste trabalho, apesar de discutirmos e usarmos estratégias, em sala de aula, não intencionamos estabelecer modelos a serem seguidos, apenas buscar relacionar os métodos de resolução de problemas, do aluno, com estratégias apontadas por seus colegas e por pesquisas feitas nessa direção. Com isso, buscamos formatar as próprias estratégias dos alunos para que elas deixem de ser algo empírico e passem a ser observadas como métodos de raciocínio próprio de cada indivíduo. Isto é, tentar levar o aluno a observar sua própria forma de pensar diante de um problema e compará-la com as de outros para que ele, com isso, consiga melhorar suas estratégias e categorizar seus métodos de trabalho, aumentado suas experiências e, consequentemente, se tornando um melhor resolvedor de problemas.

Polya (2006), na terceira parte do seu livro, apresenta o que ele chama de pequeno dicionário de heurística, apontando:

- Analogia: É uma espécie de semelhança. Objetos semelhantes coincidem uns com os outro em algum aspectos, enquanto que objetos análogos são os que coincidem em certas relações das suas respectivas partes.
- Condicionante: É uma das partes principais de um *problema de determinação*. O problema está condicionado a algo.
- Considerar a incógnita: Lembre-se do seu objetivo. Não esqueça sua meta. Pense naquilo que se deseja obter. Não perca de vista o que é necessário. Foque no fim. Considere a incógnita. Considere a conclusão.
- Contradição: Observe a condicionante e leve em consideração o que a contradiz.
- Corolário: É um teorema que se demonstra facilmente pelo exame de outro teorema que se acabou de demonstrar. A palavra *corolário* é de origem grega e sua tradução é “galardão” ou “recompensa”.
- Decomposição e Recombinação: Constitui importantes operações mentais. Examinar um objeto que provoca interesse ou desperta curiosidade, decompondo-o todo em partes para serem observadas separadamente e recompondo-o em um todo mais ou menos diferente.
- Definições de termos: São descrições de seus significados por meio de outros termos que supõe-se que sejam bem conhecidos.
- Demonstração por Absurdo e Demonstração Indireta: A *demonstração por absurdo* mostra a falsidade de uma suposição derivando dela uma absurdo flagrante. A *demonstração indireta* estabelece a verdade de uma afirmativa por revelar a falsidade da sua suposição oposta.

- Diagnóstico: É empregado aqui como um termo técnico da Educação, com o significado de “caracterização mais rigorosa do aproveitamento do aluno”.
- Equacionamento: É expressar por símbolos matemáticos uma condicionante que está formulada por palavras. Isto é, é a tradução da linguagem corrente para a linguagem das fórmulas matemáticas.
- Examinar a sua Suposição: É importante verificar a veracidade de sua suposição. Muitas suposições revelam-se erradas e, não obstante, foram úteis para conduzir a uma outra melhor.
- Execução de um Plano: Conceber um plano e executá-lo são coisas distintas. Quanto mais cuidadosamente verificarmos nossos passos na execução do plano, tanto mais livremente poderemos utilizar o raciocínio heurístico na sua concepção.
- Figuras: São, não apenas o objeto dos problema geométricos, como também importante auxílio para problemas de todos os tipos, que nada apresentam de geométricos na sua origem. Temos, assim, dois bons motivos para considerar a função das figuras na resolução de problemas.
- Generalização: É a passagem da consideração de um elemento para a consideração de um conjunto que contém esse elemento; ou a passagem de consideração de um conjunto para outro mais abrangente, que contém o conjunto restrito.

Larson (1983) “diz que estratégias ou táticas em resolução de problemas são chamadas heurísticas”. E que, os estudiosos sobre resolução de problemas (citando Polya) descreveram um número de ideias básicas que são geralmente usadas. As heurísticas apresentadas por Larson, como ele mesmo afirma, tem como foco:

1. A busca por padrões.
2. Representação por figuras.
3. Formulação de problemas equivalente.
4. Modificação de um problema.
5. Escolha de uma notação específica.
6. Exploração de simetrias.
7. Dividir em casos.
8. Fazer um retrocesso.
9. Arguir por contradição.
10. A buscar por paridade.
11. Considerar casos extremos.

12. Generalização.

Sobre essa lista de ideias que devem ser observadas sobre resolução de problemas, Larson afirma que o interessante não é a descrição, mas a implementação de cada caso. Isto é, ele não propõe essa lista para ser estudada, mas aplicada em sala de aula.

Engel (1998) trabalha na mesma linha de Polya e Larson, porém avança para um nível mais elevado, isto é, discute problemas que requer um nível maior de conhecimento e raciocínio. Para isso, ele discute as heurísticas não apenas focando as ideias gerais, mas discutindo estratégias para resolução de problemas para alguns tipos de conteúdos matemáticos bem específicos, principalmente os trabalhados em cursos de nível superior. As heurísticas são direcionadas para resolução de problemas que trabalham com: *O Princípio da Invariância, demonstrações utilizando cores, o Princípio do Extremo, o Princípio da Caixa, Enumeração de Combinações, Teoria de Números, Inequações, o Princípio da Indução, Sequências, Funções Polinomiais, Equações Funcionais, Geometria, Jogos* e *estratégias adicionais.*

Engel afirma que resolução de problemas só pode ser aprendida resolvendo problemas e o processo de resolução, para ser bem sucedido, precisa se apoiar em estratégias obtidas através de muita prática.

3. Aspectos Metodológicos

A pesquisa se deu durante um curso de Heurística de Resolução de Problemas de Matemática, proposto como uma *prática profissional* de um curso de licenciatura em Matemática de uma Instituição Pública de Ensino Superior

Do ponto de vista da abordagem do problema ou da conjectura, nossa pesquisa é classificada como “qualitativa”, pois:

> [...] os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos. Esses dados não são padronizáveis como os dados quantitativos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los (GOLDENBERG, 2004, p. 53).

Para Bicudo (2010), o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões.

> O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, como, por exemplo, da vermelhidão do vermelho, etc. Entende-se que a noção do rigor não seria aplicável a dados qualitativos, uma vez que a eles faltaria precisão e objetividade, dificultando ou impossibilitando a aplicação de quantificadores (Bicudo, 2004, p. 106).

Do ponto de vista dos objetivos, nossa pesquisa se constitui como explicativa:

> Pesquisa Explicativa: visa identificar os fatores que determinam ou contribuem para a ocorrência dos fenômenos. Aprofunda o conhecimento da realidade porque explica a razão, o porquê das coisas. Quando realizada nas ciências naturais requer o uso do método experimental, e nas ciências sociais requer o uso do método observacional. Assume, em geral, as formas de Pesquisa experimental e pesquisa *Ex post facto* (KAUARK; MANHÃES; MEDEIROS, 2010, p. 28).

Do ponto de vista dos procedimentos técnicos, nossa pesquisa se constitui como estudo de caso. “Estudo de caso: quando envolve o estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos de maneira que se permita o seu amplo e detalhado conhecimento” (KAUARK; MANHÃES; MEDEIROS, 2010).

Para a composição do nosso *corpus* de pesquisa, compreendido como o “(...) conjunto dos documentos tido em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (Bardin, 2011, p.126), foram realizado em 11 encontros de 1 hora e meia cada. Em cada encontro, era proposto um problema e pedia-se que os alunos lessem o problema e, em seguida, respondessem um questionário como o apresentado no Quadro 1. E, para coleta de dados, que compôs o nosso corpus de pesquisa, foram utilizados:

1. Observação intrínseca do pesquisador durante as atividades desenvolvidas em sala de aula, com anotações sistemáticas em diário de campo, levando em consideração o olhar do pesquisador sobre os estudantes e sobre o próprio pesquisador como professor;

2. Respostas, dos alunos, das questões propostas no questionário, apresentado pelo Quadro 1. Este questionário era recolhido, pelo professor, antes das discussões sobre o entendimento e a resolução do problema proposto. Isso era feito para que se pudesse entender como o estudante pensava diante de cada problema proposto, antes da interferência do professor.

3. Resoluções ou tentativas de resolução, apresentadas pelos alunos, dos problemas propostos em cada encontro. Da mesma forma que feita com questionário, foi feita também para essas resoluções, ou seja, a resoluções apresentadas pelo aluno eram recolhidas, pelo professor, antes das discussões.

Quadro 1 – Questionários sobre cada problema proposto

Ficha __

Responda:

1) O que você pensou ao ler o problema? (por favor, escrever o que veio à sua mente; relativo ao problema, matemática, aprendizagem, etc.; durante e após a leitura do problema 1)

2) Qual a primeira coisa que deveria ser feita para se tentar resolver esse problema? Se possível justifique.

3) Esse problema lhe é familiar? Isto é, você já resolveu algum problema parecido com esse antes?

4) Quais conhecimentos (teoria, fórmula, etc.) você acha que seriam necessários para resolver esse problema?

Fonte: Elaborado pelos autores

A dinâmica utilizada em cada encontro era a seguinte: Primeiramente, eram dados aos alunos aproximadamente 30 minutos para que eles respondessem esse questionário. Em seguida, após o professor recolher o questionário, promovia-se um debate com o objetivo de os estudantes falarem sobre as questões respondidas, refletirem sobre suas respostas e confrontarem sua forma de pensar com as dos colegas. Essa discussão durava cerca de 15 a 20 minutos.

Depois disso, eram dados mais 15 minutos para que os estudantes, influenciados pela discussão, tentassem resolver o problema e, depois disso, algum estudante, que havia conseguido responder o problema, ia lousa e colocava sua resolução. Se sua resposta não estivesse correta, o professor e os colegas o ajudavam, até que chegar à solução correta do problema. Apesar de o foco não ser a resolução do problema, mas sim a reflexão promovida pelo problema, os alunos ficava ansiosos para se chegar a uma solução. No final do encontro, o professor apresentava as teorias que tinham alguma relação com o que ocorreu durante a resolução do problema. Teorias como os quatro passos de resolução apresentados por Polya, ou seu pequeno dicionário de heurística, ou as estratégias apontadas por Engel(1998) e Larson(1983), citadas neste texto.

Para que a coleta e análise tivesse um foco bem definido, nossa pesquisa se sustentou sobre o seguinte objetivo: "Entender as operações mentais dos estudantes, durante a resolução de problemas, e as mudanças ocorridas nessas operações ao relacioná-las com outras – de colegas e das apresentadas por teóricos". Para facilitar nosso trabalho e coleta e análise de dados, propusemos as seguintes questões:

1) Quais as relações existentes entre os pensamentos de um estudante com os dos seus colegas, diante de um problema?
2) Quais estratégias, apontadas por teóricos, os estudantes usaram frente a um problema, antes e depois de ter conhecimentos delas?

4. Resultados

Os 11 encontros que ocorreram em sala de aula, seguiu sempre a mesma dinâmica: Era proposto um problema, por escrito, e pedia-se que os estudantes lessem e respondessem o questionário apresentado no Quadro 1. Após o professor recolher os questionários, os estudantes colocavam suas resoluções na lousa e começava uma discussão, buscando entender como cada estudante pensou, diante do problema proposto. Em seguida, buscava-se separar pensamentos ou estratégias semelhantes e finalmente, lhes eram apresentadas teorias que se relacionavam com questões ocorridas durante esse processo.

Nos dois primeiros encontros, trabalhamos um problema sobre geometria plana (determinar a base de um triângulo) e outro sobre matemática financeira (amortização de uma dívida), com o objetivo de levantar uma questão importante: a existência e a unicidade de solução. Nesses problemas, percebemos que todos os estudantes, inicialmente, buscaram resolvê-los sem questionar se estavam, ou não, bem escritos, se tinham, ou não, solução, se a solução era, ou não, única. Todos quiseram apresentar uma solução, quando não conseguiam uma justificativa formal para a solução apresentada, faziam isso de forma empírica. Os motivos deles encararem um problema como se a solução sempre existisse, fosse única, e o enunciado fosse inquestionável foi apontado, por eles, que, durante toda sua vida escolar, professores e livros didáticos sempre apresentavam problemas com esse perfil, revelando assim um pensamento baseado em sua experiência acadêmica, experiência essa que não deu oportunidade para que os estudantes pudessem ter um pensamento ativo, reflexivo e crítico em que pudessem apresentar suas opiniões, apenas deviam aceitar o que lhes eram impostos.

Nos próximos três encontros foram trabalhados problemas cuja resolução demandava a *busca por padrões*. Nessa etapa, pudemos observar que os problemas mais simples foram resolvidos por, praticamente, todos os alunos e os mais complexos por uma pequena minoria, mesmo a forma de raciocínio sendo a mesma. Isso se deu pelo fato dos estudantes não traçarem uma estratégia, ou tentarem entender os padrões encontrados, e ao menos refletirem sobre esses tipos de problema e/ou sobre o método de resolução usado, apenas resolviam por tentativas e erros.

Do sexto ao oitavo encontro, foram trabalhados problemas que buscavam evidenciar raciocínios sobre processos de generalização. Nessa parte apareceu também, de forma pouco modesta, modelagem matemática, decomposição e recombinação – estratégia descrita pelos nossos teóricos. Nessa parte, conseguimos identificar a dificuldade dos alunos para um entendimento mais aprofundado do conceito de variável e incógnita e uma falta de habilidade em observar simetrias, operações inversas e formalização de conceitos algébricos, revelando uma necessidade de se trabalhar álgebra, principalmente do ensino superior, voltada para uma formação mais epistemológica e buscando relacioná-la com a prática do professor que ensina matemática.

Os três últimos encontros foram destinados à problemas sobre demonstrações matemáticas. Em aspectos cognitivos, essa foi a parte considerada, por nós, como mais crítica, pois, notadamente, percebemos a falta de maturidade na maioria dos estudantes. Como se tratava de uma turma muito heterogênea, com estudantes do segundo ao sétimo período do curso, tivemos a oportunidade de notar uma discrepância de experiência entre os alunos dos primeiros para os últimos períodos. Neste sentido, o fator que pareceu prevalecer foi o de ter ou não ter cursados certas disciplinas, consideradas abstratas, como Análise, Álgebra Linear e Álgebra Abstrata. Os alunos que haviam cursados essas disciplinas conseguiam pensar demonstrações matemática em uma ideia mais geral e aprofundada, sem buscar trazer para o concreto para entende-las, além disso, os alunos mais experientes buscavam conceitos mais formais para justificar suas demonstrações como, por exemplo, o *Princípio de Indução Matemática*, enquanto que os alunos com menos maturidade acreditavam que uma demonstração estaria pronta se apresentassem um exemplo e observasse que essa situação poderia se estender a outras semelhantes.

5. Considerações Finais

As pesquisas que fazem uso de resolução de problemas em sala de aula discutem muito os aspectos de ensino e aprendizagem, mas, em geral, não buscam evidenciar e entender os pensamentos dos estudantes durante o processo de resolução de um problema, tampouco procuram fazer com que os próprios estudantes reflitam sobre isso. Questões como: por que estudantes com o mesmo nível de escolaridade, com mesma experiência e maturidade, têm níveis diferentes de facilidade e dificuldade diante de um mesmo problema? não são discutidas.

A nós parece que o entendimento do pensamento dos estudante não é importante para a discussão do processo de ensino e aprendizagem apresentado por muitos pesquisadores, apenas o seu desenvolvimento sem uma preocupação do porquê esse desenvolvimento aconteceu. Nossa pesquisa é apenas um embrião para um cem número de possibilidades de exploração desse assunto.

Esta pesquisa evidenciou também uma homogeneidade na forma de pensamento dos estudantes quando se trata de questões elementares. Entendemos como questões elementares aquelas que exigem pouco raciocínio lógico e conteúdos de matemática menos sofisticados como, por exemplo, alguns dos conteúdos de matemática da Educação Básica.

Gostaríamos de esclarecer que quando falamos em homogeneidade de pensamento a respeito de conteúdos elementares, não significa que todos, ou maioria, dos estudantes tiveram facilidade ou conseguiram resolver esses problemas. Significa apenas que as dificuldades e facilidades apresentadas pelos estudantes foram as mesmas ou parecidas, principalmente, maneira errônea de pensamento, baseada em processo tecnicista e mecanizado, revelando, a nós, que sempre que o pensamento desses alunos buscam se apoiar em conceitos estudados no Ensino Fundamental ou Médio esbarra em uma *rigidez formativa*, construída ao longo de diversos anos de formação, e que as transformações dessa forma de pensar está ocorrendo, no ensino superior, porém de forma muito lenta.

Neste sentido, esperamos que nosso trabalho possa contribuir para que pesquisadores e professores busquem, não apenas formas eficiente de ensino e aprendizagem de matemática, mas, principalmente, procure entender os processos cognitivos que ajudam a transformar as propostas em métodos eficientes.

6. Referências

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Traducao Luís Antero Reto; Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2011.

BICUDO, M. A. V. (ed.). **Filosofia da Educação Matemática: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. São Paulo: UNESP, 2010.

ENGEL, A. **Problem-Solving Strategies**. Riverdale: Springer, 1998.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**. 8. ed. Rio de Janeiro-RJ: Editora Record, 2004.

KAUARK, F. S.; MANHÃES, F. C.; MEDEIROS, C. H. **Metodologia da pesquisa: um guia prático**. Itabuna-BA: Via Litterarum, 2010.

LARSON, L. C. **Problem-Solving Through Problems**. Riverdale: Springer, 1983.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma Abordagem Historica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C.; JUSTULIN, A. M. (Ed.). **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: Teoria e Prática**. Paco Editorial, 2014. p. 17–32.

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problema?. In: ONUCHIC, L. R. *et al.* (Orgs.). **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: Teoria e Prática.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014. 158p. p.35–52.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução H L Araújo. Rio de Janeiro-RJ: Editora Interciência, 2006.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. year book. Reston-VA: NCTM-National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

SHULMAN, L. S. Those who understands: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 2, n. 15, p. 4–14, 1986.