

## A produção de conhecimento matemático na elaboração de simuladores com GeoGebra

Ivonne C. Sánchez<sup>1</sup>

Universidade Federal do Pará

Luis Andrés Castillo<sup>2</sup>

Universidade Federal do Pará

### RESUMO

Descreve-se a objetivação do conhecimento geométrico em um contexto de elaboração de simuladores com o GeoGebra realizada por professores de matemática. Tomou-se a ideia da lógica de produção do conhecimento matemático exposta na Teoria da Objetivação. Revelaram-se duas categorias de lógica: os modos de produção e as relações de produção que os participantes manifestam no desenvolvimento de uma atividade. A pesquisa envolveu 5 professores de matemática e física que assumiram o papel de promotores de aprendizagem nos clubes do GeoGebra. Os dados foram analisados em quatro fases: selecionar, transcrever, interpretar e decidir as discussões desses promotores sobre a validade das construções feitas pelos professores e apresentadas em vídeo. Os resultados revelam que os promotores utilizaram, durante o processo de instanciação do conhecimento geométrico, meios materiais como GeoGebra, livros e técnica de construção. Revelaram-se também algumas relações de produção, nomeadamente o trabalho colaborativo presente ao longo do encontro dos promotores.

**Palavras-chave:** Modos de produção; Relações de produção; GeoGebra; Professores de matemática.

## The production of mathematical knowledge in the development of simulators with GeoGebra

### ABSTRACT

This article describes the objectification of geometric knowledge in the context of math teachers making simulators with GeoGebra. The idea of the logic of the production of mathematical knowledge set out in Objectivation Theory was used. Two categories of logic were revealed: the modes of production and the relations of production that the participants manifest in the development of an activity. The research involved 5 math and physics teachers who took on the role of learning promoters in the GeoGebra clubs. The data was analyzed in four phases: selecting, transcribing, interpreting and deciding the discussions of these promoters on the validity of the constructions made by the teachers and presented on video. The results show that the promoters used material means such as GeoGebra, books and construction techniques during the process of instantiating geometric knowledge. Some production relationships were also revealed, namely the collaborative work present throughout the promoters' meeting.

**Keywords:** Modes of production; Production relations; GeoGebra; Mathematics teachers.

---

<sup>1</sup> Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2485-1059>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9964399535972053>. E-mail: [ivonne.s.1812@gmail.com](mailto:ivonne.s.1812@gmail.com).

<sup>2</sup> Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5174-9148>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4358821746569093>. E-mail: [luiscastleb@gmail.com](mailto:luiscastleb@gmail.com).

## La producción de conocimiento matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra

### RESUMEN

Este artículo describe la objetivación del conocimiento geométrico en el contexto del desarrollo de simuladores con GeoGebra por profesores de matemáticas. Se tomó la idea de la lógica de la producción del conocimiento matemático expuesta en la Teoría de la Objetivación. Se pusieron de manifiesto dos categorías de lógica: los modos de producción y las relaciones de producción que los participantes manifiestan en el desarrollo de una actividad. En la investigación participaron cinco profesores de matemáticas y física que asumieron el papel de promotores del aprendizaje en los clubes GeoGebra. Los datos se analizaron en cuatro fases: selección, transcripción, interpretación y decisión sobre las discusiones de los promotores acerca de la validez de las construcciones realizadas por los profesores y presentadas en vídeo. Los resultados muestran que los promotores utilizaron medios materiales como GeoGebra, libros y técnicas de construcción durante el proceso de instanciación del conocimiento geométrico. También fueron reveladas algunas relaciones de producción, como el trabajo colaborativo presente a lo largo del encuentro de los promotores.

**Palabras clave:** Modos de producción; Relaciones de producción; GeoGebra; Profesores de matemáticas.

### CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O grupo Tecnologias em la Educación Matemática (TEM) coordenou o projeto *Club GeoGebra: Por una Nueva Cultura Científica*, voltado para alunos do Ensino Médio de instituições públicas de ensino do estado de Zulia na Venezuela. Quem decidia participar do projeto tinha a oportunidade de aprender conteúdos matemáticos e físicos por meio da representação de fenômenos naturais e/ou artificiais na interface do GeoGebra. Participar do projeto significava passar por quatro fases: (i) seleção do fenômeno; (ii) elaboração do simulador com o GeoGebra; (iii) sistematização da experiência; e (iv) socialização das experiências (SÁNCHEZ, 2017).

Para tornar o projeto operacional, usou-se, como estratégia de aprendizado, o trabalho de projeto de simulação com o GeoGebra. A realização desses projetos de aprendizagem envolve, entre outras questões, o desenvolvimento de modelos reais – matemáticos, físicos e computacionais baseados em referenciais da realidade; teórico-práticos (conhecimentos disciplinares); e tecnológicos (relacionados à utilização de *software*) – com a ajuda de um promotor de aprendizagem, ou seja, um professor de matemática e física que acompanha os alunos no desenvolvimento dos seus projetos de simulação.

Nesse contexto, todos os anos letivos, antes do início das atividades dos clubes, os promotores reuniam-se para planejar as primeiras sessões de trabalho com os alunos. Nesse sentido, no terceiro ano consecutivo de atividades nos clubes foi tomada a decisão de iniciar os trabalhos com o estudo de um mesmo projeto de simulação antes de os alunos decidirem os seus próprios projetos. Nesses encontros, surgiu a necessidade de discutir as possíveis formas como os alunos resolvem as tarefas de simulação do projeto base, o que implica pensar como

aluno, gerar procedimentos de construção geométrica com o GeoGebra e analisar a consistência e relevância dessas formas de agir.

Do exposto surge um dos propósitos deste estudo, que é o de analisar as reuniões de trabalho dos promotores, o que permitirá uma compreensão crítica das possíveis formas de resolução de uma tarefa de simulação por parte dos alunos de forma consistente. Além disso, a análise pode favorecer o surgimento de novas discussões e reflexões possíveis de serem realizadas em torno das sessões de trabalho com os alunos, de forma que sejam reconhecidos os procedimentos de construção geométrica mais sofisticados e fundamentados teoricamente, para responder às tarefas de simulação.

### **A ELABORAÇÃO DE SIMULADORES COMO CONTEXTO DE PESQUISA**

Desde o início do projeto do clube, foi proposto entender e promover a atividade de fazer simuladores com o GeoGebra como uma oportunidade de aprender e ensinar matemática e física. Nesse sentido, grande parte de nossas reflexões, baseadas em várias perspectivas teóricas (DÍAZ; PRIETO, 2016; GUTIÉRREZ; PRIETO; ORTIZ, 2017; SÁNCHEZ, 2017; SÁNCHEZ; PRIETO, 2016), é direcionada para o trabalho matemático dos alunos quando eles desenvolvem seus simuladores. Essas reflexões iniciais permitiram-nos reconhecer as características dos processos de matematização e trabalho matemático que ocorrem no desenvolvimento de simuladores com o GeoGebra; a natureza da experimentação, visualização e reorganização do conhecimento em alguns momentos específicos dessa atividade; e os elementos da atividade matemática que são colocados em jogo quando um simulador é desenvolvido com o GeoGebra (tarefas, técnicas, tecnologias e teorias).

Apesar desses avanços, algumas experiências com o desenvolvimento de simuladores com o GeoGebra ainda não foram exploradas, como o momento em que os promotores se reúnem para analisar as formas geométricas de construção de seus alunos do Clube e propor técnicas construtivas consistentes. Em momentos como esse, as teorias socioculturais de aprender e ensinar poderiam nos permitir compreender a lógica de trabalho desses professores, por isso, neste documento propomo-nos a fazer uma interpretação dessa realidade a partir da Teoria da Objetivação (TO) de Radford (2013a).

A TO é baseada em uma posição política, conceitual, histórica e cultural que lhe dá forma e conteúdo próprios. A partir dessa teoria, a educação em geral – e o ensino-aprendizagem em particular – lida com saberes e seres, ou seja, estudam-se os componentes

epistemológicos e ontológicos da formação discente, de modo que a prática educativa concreta produza não apenas conhecimentos mas também subjetividades (RADFORD, 2014a), em um espaço que Leont'ev (1978) chama de “trabalho” e que, a partir da TO, é concebido como atividade. Nesse sentido, Radford (2014a) sugere que nos esforcemos para compreender a produção de conhecimento e de subjetividades na sala de aula, e que promovamos aquelas formas de ação pedagógica que constituam experiências significativas de ensino e aprendizagem, ou seja, que facilitem tanto uma compreensão profunda dos conceitos matemáticos quanto a criação de um espaço político e social no qual se possam desenvolver subjetividades reflexivas, solidárias e responsáveis.

Assim, o foco deste trabalho será direcionado para um espaço político e social específico, no qual alguns professores de matemática e física se reúnem para resolver uma tarefa de simulação. Nesse encontro foram revelados alguns saberes e subjetividades reflexivas – que contribuem para criar experiências significantes de ensino e aprendizagem a respeito desse tema específico com os alunos – sobre a representação, com o *software* GeoGebra, de circunferências tangentes exteriores.

Nesse contexto, o trabalho visa descrever o processo de instanciação dos modos geométricos de pensar e agir de um grupo de professores de matemática, diante da tarefa de construir circunferências tangentes externas para representar uma das partes de um mecanismo.

## **LÓGICA DE PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO NA ELABORAÇÃO DE SIMULADORES COM GEOGEBRA**

A TO afirma que aprender não é simplesmente adquirir conhecimento, mas também um processo formativo e transformador do ser, do sujeito que aprende. Dessa forma, conhecer e ser são considerados aspectos inter-relacionados de um mesmo processo, que é ensinar e aprender ao mesmo tempo.

A partir da TO, esses aspectos estão associados a dois construtos teóricos inter-relacionados: o primeiro é a *Objetivação*, que se expressa nos processos sociais por meio dos quais o aluno alcança uma compreensão crítica ao dar significado aos objetos culturais matemáticos. O segundo é a *Subjetivação*, que se expressa nos processos intersubjetivos por meio dos quais o aluno se posiciona nas configurações das práticas sociais das quais participa e pelas quais se reconhece e é reconhecido como membro de uma comunidade sociocultural (RADFORD, 2011).

Para compreender a produção de conhecimento e as subjetividades, é preciso fazê-lo por meio de uma lógica cultural dessa produção de conhecimento que ocorre no interior de uma atividade. Essa lógica refere-se, por um lado, à produção da vida material que inclui artefatos e conhecimentos culturais e, por outro, à existência humana. Nesse sentido, essa lógica é caracterizada: (i) pelas formas de produção do conhecimento, que têm a ver com noções sobre o conhecimento e as formas de indagar e testar; e (ii) pelas formas de cooperação humana, que se referem aos tipos de interação com os outros na atividade (RADFORD, 2014b).

Essa lógica cultural do conhecimento matemático pode ajudar a compreender os processos de instanciação produzidos em uma reunião de promotores que se dedicam à resolução de uma tarefa de simulação. Isso se deve ao fato de que a elaboração de simuladores com o GeoGebra é uma atividade mediada por diferentes artefatos e conhecimentos matemáticos e físicos, e, nisso, ganha vida um grupo de alunos e promotores que materializam ideias instanciadas como conhecimentos que permitem a elaboração dos simuladores. A lógica de produção de conhecimento desses promotores será estudada a partir de suas duas categorias principais: os modos de produção e as relações de produção.

Por um lado, os *modos de produção* referem-se a todos aqueles meios materiais e intelectuais que os membros de uma cultura colocam em jogo nos processos de produção e reprodução da vida. Os modos de produção não são simplesmente objetos materiais, mas incluem conhecimentos, habilidades e aspectos técnicos da colaboração (RADFORD, 2013b).

Ao tentar revelar um possível percurso de trabalho que conduza à representação de alguma peça do fenômeno trabalhado, os professores utilizam materiais que incluem tanto o *software* GeoGebra como as técnicas de construção empregadas para responder à tarefa de simulação com a qual se defrontam. Por isso, nas reuniões dos promotores revela-se pelo menos um conhecimento sobre as ferramentas e funcionalidades do GeoGebra – e sobre uma certa teoria geométrica (por exemplo, o que se refere à posição relativa das circunferências) – que justifica as técnicas de construção.

Por outro lado, as *relações de produção* referem-se às relações entre os indivíduos, às suas formas de interação, e são essas as relações que organizam o contato entre os sujeitos. Dentro das relações de produção de uma cultura, *a responsabilidade pode ser distinguida como vigilância*, que tem a ver com uma sensibilidade que nos faz conectar com os outros e nos permite ser capazes de ler sinais de incompreensão matemática, frustração ou ansiedade, o que nos ajuda a superar problemas (RADFORD, 2013b).

Do exposto, podemos deduzir que, para a descrição do processo de instanciação das circunferências tangentes externas realizado pelos professores, focamos nossa atenção nas discussões geradas ao longo do encontro, principalmente sobre duas questões. Uma delas é o trabalho colaborativo dos promotores, ou seja, aqueles momentos de apoio mútuo que surgiram quando alguém não entendeu algo que estava sendo discutido. A outra questão é a responsabilidade como vigilância, que está presente em determinados momentos do encontro.

## **PROCEDIMENTOS METODOLOGICOS**

Esta pesquisa é de abordagem qualitativa, nos termos de Oliveira *et al.* (2020), pelo fato de buscar dar respostas aos modos de produção e às relações de produção dos professores de matemática e física que participam do projeto Clube GeoGebra, um contexto específico, que precisa de uma análise mais analítica e descritiva. Seguidamente descrevemos, em primeiro lugar, os participantes da pesquisa e o contexto em que ela é realizada; em segundo lugar, as informações obtidas com a pesquisa e os instrumentos de registro de informações; e, por último, a análise dessas informações.

### **Participantes e contexto**

Participaram da pesquisa cinco professores de matemática e física que assumiram o papel de promotores do projeto Clube GeoGebra. Nesse contexto o projeto completava seu terceiro ano consecutivo de aplicação. Esses professores pertenciam a diferentes instituições educacionais públicas dos municípios de San Francisco, Maracaibo, San Rafael del Moján, Cabimas e Simón Bolívar, todos no estado de Zulia na Venezuela. São usados os pseudônimos Sara, Blanca, Elisa, Eduardo e David, para resguardar a identidade dos professores que participaram da reunião.

Para essa terceira edição do projeto, os promotores reuniram-se uma vez por semana por um período de quatro horas a cada vez, para discutir assuntos relacionados ao desenvolvimento do projeto em suas diferentes fases. Entre os assuntos abordados nessas reuniões de trabalho estão o planejamento dos primeiros encontros com os alunos dos clubes do GeoGebra bem como a forma como o plano elaborado deve ser executado pelos promotores.

Relativamente ao primeiro assunto, foi decidido por unanimidade que todos os clubes constituídos deveriam começar a trabalhar no desenvolvimento conjunto do simulador correspondente ao mecanismo came-seguidor. O objetivo foi que os alunos se familiarizassem

com os passos que devem ser seguidos para criar um simulador na visualização gráfica do GeoGebra; e que desenvolvessem habilidades para o uso do *software*.

No que diz respeito ao segundo assunto, os primeiros encontros de trabalho foram dedicados à discussão e reflexão sobre as formas de intervenção dos promotores na elaboração do mecanismo leva-seguidor. Essas reuniões tinham dois propósitos. Por um lado, pretendeu-se nivelar o trabalho elaborado nos diferentes clubes e evitar atrasos na realização da atividade de desenvolvimento do simulador. Por outro lado, os promotores queriam promover a aprendizagem sobre formas de gerir eficientemente esse processo em um clube GeoGebra.

### **Instrumentos de informação**

A informação que utilizamos nesta pesquisa provém de uma das reuniões de trabalho realizadas pelos promotores, na qual eles tiveram que verificar a validade da construção da segunda tarefa de simulação do mecanismo came-seguidor. Em reunião anterior, os promotores resolveram a tarefa de *representar o came*, o que significou experimentar o GeoGebra, discutir e refletir sobre as construções auxiliares e consultar um especialista em física para responder à tarefa em questão. Já com uma experiência adquirida, os promotores tiveram que se atentar aos seguintes objetivos para um próximo encontro:

- Rever a construção feita por uma aluna de um clube GeoGebra, com a qual a estudante tenta responder à tarefa de simulação *para representar o seguidor do sistema came-seguidor na janela de visualização do GeoGebra*.
- Estudar uma posição fixa em relação às construções feitas pela aluna.
- Propor outra maneira de resolver a tarefa, que leve a uma construção consistente.

Em termos gerais, o objetivo dessa reunião foi chegar a acordos sobre como abordar a construção do rastreador (outra parte do sistema), tanto na perspectiva dos alunos como na perspectiva dos promotores. Para dar início a essa reunião, um dos promotores fez a sua primeira intervenção e explicou o que tinha feito para representar o came na janela de visualização do GeoGebra. Concretamente, o promotor centrou-se na primeira tarefa de construção do modelo, referente a uma *circunferência tangente aos arcos de circunferência que dão forma ao contorno da came, a partir de um ponto exterior*. O promotor conseguiu construir esse objeto, mas seu produto era inconsistente porque a circunferência não era tangente a todos os arcos já renderizados na tela.

A seguir, uma promotora afirmou que, quando alcançava a tangência desejada, apresentava sua construção aos demais, e todos procuravam detectar alguma inconsistência no raio da circunferência. Naquele momento, o esforço dos presentes era direcionado para descobrir em qual etapa da técnica construtiva estava o erro, o que o causou e como resolvê-lo.

A discussão surgida naquele momento foi registrada em formato de vídeo pelo período de uma hora. Esse registro revela episódios em que os participantes verificam a consistência da construção, identificam a origem dessa inconsistência e formulam caminhos para a superação desse problema. As reflexões e discussões dos promotores assumem a forma de discursos orais que refletem o modo como eles: (i) utilizam a teoria geométrica para representar a circunferência tangente exterior; (ii) aplicam o GeoGebra para verificar a validade da técnica; e (iii) manifestam a sua preocupação em compreender a teoria e ser sensíveis à necessidade de compreensão de todos. Na pesquisa, os dados correspondem a esses discursos.

### **Análise das informações**

A análise das informações foi realizada por meio de quatro etapas (RADFORD, 2015). A primeira consistiu em *selecionar* nos registros os segmentos do discurso dos professores que davam conta dos modos de produção e das relações de produção surgidas naquele momento. Para a escolha desses segmentos, tivemos em conta que o seu conteúdo refletia os meios materiais (GeoGebra, manuais, técnica construtiva) e intelectuais (conhecimentos geométricos, físicos e relativos à realidade) que constituem a atividade (RADFORD, 2014a).

A segunda etapa consistiu em *transcrever* os trechos selecionados, por meio de um processador de texto, e *organizar* as transcrições levando em consideração o momento em que os trechos ocorreram. Na terceira etapa, essas transcrições foram *interpretadas* e contrastadas com o quadro conceitual desta pesquisa, com o objetivo de identificar e listar as questões relacionadas aos modos de produção e às relações de produção durante o processo de instanciação.

Por fim, na quarta etapa, *decidimos uma forma de escrever os resultados* de acordo com a lógica de produção evidenciada nos segmentos.

## **RESULTADOS E DISCUSSÃO**

A pesquisa possibilitou reconhecer nos discursos analisados os modos e as relações de produção que surgiram no processo de instanciação de uma relação de tangência entre

circunferências – tangentes externas – (D’AMORE, 2015). Destacam-se as seguintes questões desse processo: em primeiro lugar, os docentes foram envolvidos em uma dinâmica de validação, apresentada por um dos promotores, da construção realizada, que conduziu ao reconhecimento de incoerências na técnica aplicada. Em segundo lugar, foi possível localizar a inconsistência da técnica por meio da revisão de suas etapas e ações. Em terceiro lugar, superou-se a inconsistência e conseguiu-se uma construção adequada à representação da peça.

Adicionalmente, no processo de instanciação, destaca-se também a utilização do GeoGebra através de construções auxiliares que permitiram aos promotores validar a técnica utilizada, detectar o erro e produzir: novas formas de construção das circunferências tangentes exteriores; conhecimento sobre o fenômeno e as circunferências tangentes externas; e as interações entre eles (comunicação, gestos, trabalho colaborativo e sentido de responsabilidade). A Tabela 1 apresenta um resumo dos resultados obtidos com a análise realizada no vídeo, em correspondência com o quadro conceitual desta pesquisa.

**Tabela 1** – Resumo da análise realizada no vídeo

<b>Vídeo n.º: 1</b>	<b>Duração do vídeo: 1 hora</b>	<b>Data: 12/12/2016</b>
N.º dos segmentos	duração do segmento	Lógica de produção do conhecimento
1	00:11:18 a 00:12:14	Modos de produção
2	00:39:00 a 00:40:07	
3	00:10:52 a 00:11:12	
4	00:15:21 a 00:16:48	
5	00:20:35 a 00:21:43	Relações de Produção
6	00:21:43 a 00:23:24	
7	00:46:36 a 01:02:03	

**Fonte:** elaboração própria dos autores

## **Modos de produção**

### Sobre os meios materiais

No início do encontro, os promotores utilizaram o GeoGebra para analisar a construção realizada por Sara. No segmento 1 fica evidente que Sara, Blanca, Eduardo, Elisa e David usam certas ferramentas do GeoGebra para explorar essa construção e verificar sua validade. Nesse sentido, Sara e Blanca sugerem usar a ferramenta *Zoom in*, para obter uma melhor visualização da construção; e aplicar a opção *Animação* do controle deslizante, para ativar o movimento (L1 e L2). Enquanto isso, Eduardo observa que o raio da circunferência muda de tamanho – aumenta e diminui –, o que permite uma possível inconsistência na construção (L3), que está implicitamente assumida na conversa. Para observar melhor a inconsistência, Blanca propõe

alterar a configuração do controle deslizante de tempo para *incrementos crescentes* (consulte L5).

*Segmento 1 [00:11:18 a 00:12:14]*

- L1 Sara: Vamos aproximar [a construção] para que [a tangência] possa ser vista.  
L2 Blanca: Mas primeiro precisamos aplicar a opção de animação.  
L3 Eduardo: Espera aí [a circunferência] cresceu.  
L4 Elisa: Sim, cresceu.  
L5 Blanca: Use a opção [controle deslizante] crescente para fazer [a circunferência] girar várias vezes.  
L6 Davi: O que você diz Eduardo? O que está crescendo?  
L7 Elisa: O raio [da circunferência]. Mas fica [melhor] quando você remove a opacidade [referindo-se à circunferência].  
L8 Eduardo: Aí [apontando para a circunferência em movimento] diminui e o raio aumenta.

Na tentativa de superar a inconsistência detectada, os desenvolvedores sentiram posteriormente a necessidade de usar uma das ferramentas de construção oferecidas pelo GeoGebra para encontrar os pontos de tangência das circunferências. Para o efeito, no segmento 2, David sugere traçar uma tangente à curva para localizar o primeiro ponto (L9), ao que Elisa e Sara respondem informando aos outros da existência de uma ferramenta GeoGebra – e como ela pode ser aplicada (L10 e L11) – que permite traçar uma tangente a uma curva. Nesse momento, surgiu uma primeira aproximação dos pontos de tangência desejados (L12 e L13).

*Segmento 2 [00:39:00 a 00:40:07]*

- L9 Davi: Esse ponto de tangência está à esquerda do [ponto] J. (...) Eu poderia construir uma linha tangente à curva naquele ponto. O GeoGebra tem uma ferramenta de tangência?  
L10 Elisa: Sim, existe uma ferramenta chamada *Tangentes* que o GeoGebra possui.  
L11 Sara: Para utilizá-la, [a ferramenta] pede que conheçamos o ponto ou reta e depois a circunferência, cônica ou função.  
L12 Davi: É isso, [a ferramenta] me pede um ponto, no caso o ponto é o J; então a cônica que seria o arco de circunferência. Aí está, olha [apontando para a tela]. Essa é a linha de tangência através desse ponto.  
L13 Eduardo: E esse ponto pertence a esse arco.

Em ambos os segmentos da discussão, o meio material utilizado pelos professores foi o GeoGebra. Além de permitir a representação dos componentes de um fenômeno real em sua visualização gráfica (RUBIO; PRIETO; ORTIZ, 2016), o uso do GeoGebra justifica-se pela capacidade de multi-representação dos objetos matemáticos que esse *software* oferece (FIORITI, 2012; HOHENWARTER, 2006; PRIETO, 2016), algo que foi crucial tanto na detecção do erro quanto na superação dele pelos promotores. Para pesquisadores como Villareal

(2012), os meios de construção do conhecimento matemático (neste caso, o GeoGebra) são constituintes da atividade em que ele é produzido.

Por fim, nos segmentos citados, destaca-se uma relação entre o uso de construções auxiliares e os processos de validação das construções quando os promotores respondem à tarefa proposta. Nesse sentido, Sánchez e Prieto (2016) mostram a importância de realizar construções auxiliares para resolver uma tarefa de simulação.

### Os meios intelectuais

Durante a reunião dos promotores, foram revelados certos meios intelectuais que facilitaram a realização das construções necessárias para a representação do came-seguidor no GeoGebra. Essas mídias estão relacionadas ao conhecimento sobre o fenômeno e a matemática. A respeito do fenômeno, todos os promotores deveriam saber algo sobre as partes e o funcionamento do sistema came-seguidor, já que tal fenômeno foi objeto de discussão e reflexão em reunião anterior. Nesse sentido, o segmento 3 fornece evidências de que todos os promotores tinham conhecimento sobre o fenômeno simulado, mas um deles parecia ter um conhecimento mais profundo do que os outros. Na discussão, Sara começa afirmando que havia representado o seguidor no GeoGebra (L14).

A seguir, David sente a necessidade de especificar o que Sara disse, incluindo na conversa um nome para a primeira parte do seguidor que é objeto de representação – portanto, ele pergunta aos presentes como poderia ser chamada aquela determinada peça (L15). Com base em seu conhecimento sobre o fenômeno, Eduardo responde à pergunta de David (L16) e acaba completando a ideia ao incluir o movimento particular que o came realiza com o seguidor durante sua trajetória (L17).

### *Segmento 3 [00:10:52 a 00:11:12]*

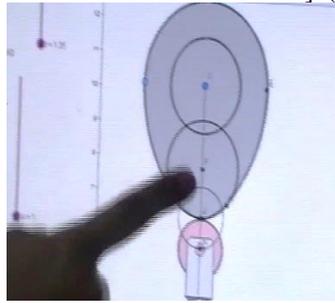
- L14 Sara: Consegui representar o rastreador no GeoGebra.  
L15 Davi: Como poderíamos chamar essa parte [curvilínea]?  
L16 Eduardo: Podemos chamá-lo de “o rolo”, devido ao tipo de seguidor que este mecanismo possui, existem outros como ponta, face plana e outros.  
L17 Davi: O rolete é tangente à toda a curva [do came].

O saber matemático em torno do qual giraram as discussões e reflexões dos promotores nesse momento do encontro tem a ver com a relação de tangência entre circunferências externas. Na discussão, o interesse por esse conhecimento decorre da realidade estudada, pois

a superfície do came permanece em contato com o rolete seguidor durante todo o seu percurso. No mundo matemático, esse contato foi interpretado como um ponto de tangência entre as figuras que modelam cada peça (circunferência 1 e circunferência 2), portanto, o interesse dos promotores concentrou-se em como determinar o referido ponto.

O segmento 4 mostra que, no início dessa discussão, os promotores não foram claros sobre a teoria utilizada por Sara na sua construção, nem sobre a forma como ela interpreta essa teoria para justificar a técnica de construção utilizada por ela. No início, Sara apresenta uma definição de circunferências tangentes externas, que, segundo ela, norteou seu trabalho matemático (L18). Imediatamente a seguir, David tenta interpretar essa definição à luz da construção analisada (a exposta por Sara) – L19 –, mas dado o quão complicado isso foi para os restantes presentes, Sara faz outra explicação da teoria, com base nos elementos já construídos no GeoGebra (L20). No manejo da teoria por Sara, observamos uma imprecisão quanto aos elementos que compõem a definição do ponto de vista teórico. Ou seja, Sara insiste em relacionar a soma dos raios das circunferências com outra soma, e não com a distância entre os centros dessas figuras.

#### Segmento 4 [00:15:21 a 00:16:48]

- L18 Sara: Pois trabalhei com a definição de circunferências tangentes exteriores, onde se diz que “duas circunferências são tangentes exteriores desde que a soma dos raios de ambas as circunferências sejam iguais à distância de cada centro ao ponto de tangência”.
- L19 Davi: OK. Isso significa que o raio 1 [da circunferência que contém o arco que contorna a forma do came] mais o raio 2 [da circunferência que modela o rolo] é igual ao centro 1 centro 2 [comprimento do segmento delimitado pelos centros das circunferências]. (...)
- L20 Sara: As duas circunferências são tangentes exteriores desde que a soma deste raio [apontando para o raio 1] e este raio [apontando para o raio 2] seja igual à soma desta distância [apontando para o raio 1 ao ponto de tangência] e esta distância [apontando para o raio 2 ao ponto de tangência].
- 
- L21 Davi: É a distância entre os centros [referindo-se à última soma referida por Sara em L20].
- L22 Blanca: Mas quais são essas distâncias? Os raios?
- L23 Eduardo: Já entendi por que o raio da circunferência diminui e aumenta de tamanho.

Os conhecimentos revelados nos segmentos 3 e 4 pertencem a duas categorias do ciclo de modelagem matemática que ocorre no desenvolvimento de simuladores. Uma explicação detalhada de tal ciclo pode ser encontrada em Gutiérrez (2017). A primeira categoria é pertinente ao conhecimento relacionado ao fenômeno da simulação. O conhecimento dessa

realidade ajuda os promotores a identificarem o nome e o número de peças que devem ser representadas com o GeoGebra, a natureza do fenômeno e como funciona na realidade. A segunda categoria está relacionada ao conhecimento matemático que orienta a construção com o *software* das figuras geométricas identificadas na matematização. No caso dos desenvolvedores, a relação de tangência entre as circunferências externas constitui aquele conhecimento que pode garantir uma construção com consistência geométrica desde que se tenha a capacidade de interpretar essa teoria nas construções feitas com o *software*.

Investigações como as realizadas por Pontes-Pedrajas (2005) revelam as relações entre o desenvolvimento de simuladores e as áreas do conhecimento matemático, tecnológico e outras áreas do conhecimento humano que permitem aos alunos visualizar o desenvolvimento de processos simples ou complexos; e mostram a evolução do sistema representado e a interação entre os vários elementos que o compõem ou, pelo menos, algumas consequências de tais interações. Porém, diferentemente dos resultados obtidos neste trabalho, o autor não dá relevância ao conhecimento advindo do fenômeno e concentra-se apenas no conhecimento científico.

## **Relações de Produção**

### *Sobre a responsabilidade como vigilância*

Durante as reuniões realizadas pelos promotores, ficou evidente que eles têm um propósito a alcançar, ou seja, todas as discussões, debates, propostas e reflexões que realizam visam atingir esse propósito, que foi se transformando à medida que o encontro avançava. No final, os desenvolvedores começaram a verificar a validade da construção específica e propor uma nova técnica de construção do seguidor de came com consistência geométrica. Nesse tipo de reunião é importante que todos os promotores participem e apresentem as suas ideias de forma a atingir o objetivo. Mais importante ainda é que, ao final do encontro, todos os promotores concordem com os resultados obtidos e tenham clareza sobre a técnica alcançada, já que eles próprios devem replicar a construção com os participantes de seus clubes. Por isso, no encontro, podemos perceber que os promotores sentiram a preocupação de que todos entendessem a técnica definida e trabalhassem de forma colaborativa para sua elaboração.

No segmento 5, David percebe – devido aos sinais de mal-entendido e à pouca participação que o professor estava tendo no momento – que Blanca não está entendendo a

teoria que estão usando. Assim, ele propõe a ela que faça a construção desde o início, o que expressa seu *senso de responsabilidade* para com sua parceira (L23 e L24).

#### Segmento 5 [00:20:35 a 00:21:43]

- L23 Davi: Blanca, proponho que você refaça a construção feita [por Sara] para que você entenda as etapas que ela realizou. Vamos raciocinar cada passo [da técnica]. Mas o mais importante, Blanca, você entendeu a teoria?
- L24 Blanca: Não, não entendi nada.
- L25 Davi: Ela não entendeu a teoria e sem entender ela não consegue replicar a construção. Sara, por favor, explique novamente o que você entendeu da teoria.
- L26 Sara: A teoria diz que duas circunferências são tangentes exteriores se a soma dos dois raios for igual à soma da distância entre o centro de uma circunferência e o ponto de tangência mais a distância desse ponto de tangência ao centro do outro circunferência.

A análise desse segmento dá conta de como os promotores se relacionavam entre si para que todos pudessem entender a teoria. Especificamente, há um promotor que consegue ler, em um de seus colegas, sinais de mal-entendido matemático, frustração e ansiedade em relação à teoria. Esse tipo de situação é chamado por Radford (2013b) de “responsabilidade como vigilância”, que, nesse caso, se manifestou na sensibilidade de David diante da incompreensão de Blanca. No entanto, a situação não terminou com a identificação do problema – esse promotor assumiu, juntamente com Sara, o papel de guia ou companheiro (EDEL, 2003) para garantir que Blanca e os outros promotores, incluindo ele próprio, compreendessem a teoria.

#### Sobre o trabalho colaborativo

Durante o encontro foram realizadas discussões e reflexões que dão conta do *trabalho colaborativo* realizado pelos promotores para representar o rastreador no GeoGebra. Concretamente, os promotores propuseram ideias, discutiram a sua pertinência e depois as validaram, comparando-as com alguma teoria matemática ou algumas ferramentas do GeoGebra.

No segmento 6 fica evidente que, no início da discussão, nem todos os promotores tinham clareza sobre a teoria das circunferências tangentes externas. Porém, foi Eduardo quem manifestou sua incompreensão (L27). Na tentativa de ajudar o companheiro, Sara explica como entendeu a teoria que utilizou para nortear seus trabalhos matemáticos na representação do rolo (L28), e Eduardo, ao ouvi-la, expressa sua discordância com o que Sara diz por não fazer sentido para ele (L29). Na tentativa de resgatar algumas ideias valiosas já discutidas e validadas, David

lembra a seus colegas quais objetos geométricos contam para construção na visualização gráfica do GeoGebra (L30).

Para potenciar as suas ideias, Sara recorre a um livro de Matemática para professores primários com algum reconhecimento entre os presentes (ANDONEGUI, 2007) e lê a definição de circunferências tangentes exteriores (L31). Por fim, David propõe uma ideia que é aceita por todos os presentes e implementada (L33).

#### *Segmento 6 [00:21:43 a 00:23:24]*

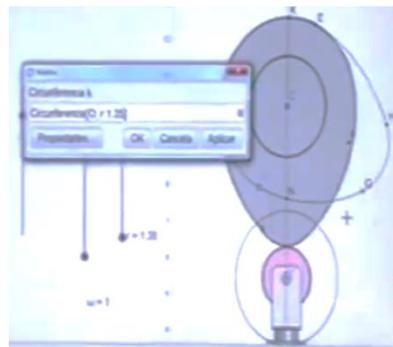
- L27 Eduardo: Espere um minuto, eu não entendi.  
L28 Sara: O raio um mais o raio dois é igual à distância um, sendo a distância um o raio um mais a distância dois.  
L29 Eduardo: Isso não tem sentido.  
L30 Davi: Uma coisa valiosa aqui é que temos quatro arcos e sabemos quais são os centros dos quatro arcos, dois estão nas extremidades do diâmetro da primeira circunferência e os outros são os pontos C e G.  
L31 Sara: Aqui diz [apontando para uma página do livro], circunferências tangentes externas: *quando a distância entre os centros de ambos é igual à soma de seus respectivos raios.*  
L32 Blanca: Mas não foi isso que você falou [referindo-se a Sara].  
L33 Davi: Se é o mesmo, mas, em outras palavras. [...]. Mas, temos os quatro centros, a partir desses centros posso construir meias linhas tendo esses centros como origem das meias linhas. Esse seria um centro e o outro centro seria o da circunferência que representa o rolo.

Finalmente, o segmento 7 mostra como os promotores conseguiram especificar as etapas da técnica de construção para a representação do rolo no GeoGebra. Nesse momento, é David quem propõe o procedimento que devem seguir para construir a circunferência (L36). No entanto, Eduardo propõe uma etapa de construção que é mais eficiente para ele naquele momento (L37).

A esse respeito, Blanca expressa uma forma de fazer as circunferências restantes (L39), mas sua proposta é refutada por Elisa, que considera que Blanca não estava baseando seu raciocínio na teoria geométrica discutida, nem na proposta da técnica construtiva, o que constituía uma incoerência (L40). Para reforçar mais uma vez o raciocínio realizado ao longo do encontro, David explica novamente a técnica por ele proposta (L41).

Segmento 7 [00:46:36 a 01:02:03]

L36 Davi: Como já sei os raios que precisamos, construo uma circunferência com centro em C e raio [igual a] a soma dos dois raios, e isso me dará um corte com a linha reta. (...) Blanca, você vai construir uma circunferência com centro em C e raio  $r*1,77+0,65$ . Aquele corte que temos abaixo [com a linha] deve ser o centro. Esse corte permitirá o que a teoria diz.



A diferença é sempre tangente, o que temos que resolver é que sempre aparece quando a concavidade é para cima e para baixo.

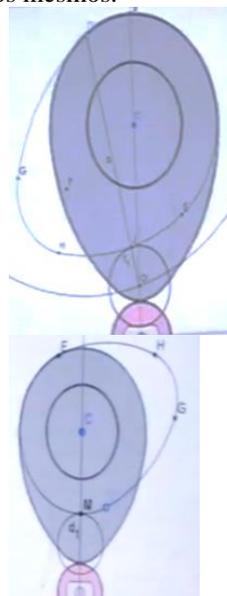
L37 Eduardo: Mas se cruzarmos o arco da circunferência com a linha e criarmos uma circunferência desse ponto até o já encontrado, ele ficará indefinido nos outros arcos.

L38 Davi: Exatamente, isso pode funcionar. (...) Para os outros circunferências devemos fazer a relação novamente porque um dos raios muda.

L39 Blanca: ferramenta *Compasso*.

L40 Elisa: Você não pode Blanca, porque os raios não são os mesmos.

L41 Davi: Vamos voltar novamente. Para encontrar as outras circunferências, devemos adicionar o raio dos arcos ao raio da circunferência do rolo e interceptá-lo com a linha que passa por C. Em seguida, desenhamos um segmento que une os centros de ambas as circunferências e o interceptamos com os arcos da circunferência para determinar o ponto de tangência, para criar a circunferência que procuramos.



L42 Davi: Agora que temos tudo, vamos esconder as construções auxiliares e ver como ele se move. (...) A circunferência é tangente a toda a curva e o valor do raio dela não muda como queremos, conseguimos representar essa peça.

Os segmentos 6 e 7 revelam a forma como um grupo de promotores consegue atingir os seus propósitos através do trabalho colaborativo que esteve presente em todos os momentos, da utilização de meios materiais e intelectuais e da sensibilidade para com os seus pares no momento de algum desentendimento teórico. Especificamente, nesses dois últimos segmentos fica evidente que as contribuições de cada promotor, a responsabilidade e o compromisso de estar sempre atento, o respeito às ideias do outro (mesmo quando não concordam) e, principalmente, a participação e a ajuda mútua permitiram o alcance do propósito estabelecido.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, o processo de instanciação do conhecimento geométrico foi descrito a partir de uma perspectiva sociocultural de aprendizagem e ensino de matemática, em um contexto de construção de simuladores com o GeoGebra. Especificamente, com apoio nas ideias de uma nova lógica cultural de aprendizagem matemática, proposta pela Teoria da Objetivação, estudamos as discussões de um grupo de promotores que enfrentaram a tarefa de validar uma construção geométrica e propor novas formas de resolver a representação de circunferências com o GeoGebra. Por meio dessa análise, foram identificadas as duas categorias da lógica da produção, a saber, os modos de produção e as relações de produção.

Os resultados evidenciam os aspectos que estiveram presentes nos modos e nas relações de produção manifestados no processo de instanciação do conhecimento geométrico referido às circunferências tangentes externas. Em relação ao primeiro, os resultados revelam que o meio material utilizado pelos promotores é o GeoGebra, pois este permite a representação do fenômeno na visualização gráfica do *software* por meio da construção de figuras geométricas. No entanto, também foram revelados o uso de livros e uma técnica de construção que segue uma lógica de etapas a serem executadas para alcançar a representação. Nesse sentido, para representar uma parte do fenômeno, era necessário que os participantes utilizassem diferentes meios materiais para atingir um objetivo comum.

Os resultados também revelam os meios intelectuais, que se referem ao conhecimento utilizado pelos promotores durante o encontro. Estes podem ser de dois tipos: por um lado, referidos ao fenômeno e, por outro, relacionados à matemática. Ambos estão localizados em dois grandes processos no ciclo de modelagem descrito por Gutiérrez (2017): matematização e trabalho matemático.

Sobre as relações de produção, os resultados mostram dois aspectos importantes: a responsabilidade como vigilância e o trabalho colaborativo. Quanto ao primeiro, há indícios de que, na instanciação do conhecimento, os promotores têm que ser sensíveis com os demais sujeitos da atividade e intervir quando identificam algum indício de mal-entendido em algum deles. Quanto ao segundo, o trabalho colaborativo esteve presente em todas as discussões geradas pelos promotores. Do exposto, destacamos o esforço dos promotores para conseguir resolver a tarefa de forma consistente e o respeito pelas intervenções realizadas.

## REFERÊNCIAS

- ANDONEGUI, M. **La circunferencia y el círculo**. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría, 2007.
- D'AMORE, B. Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: una contribución a la teoría de la objetivación. In: BRANCHETTI, L. (ed). Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education. **Isonomia, On-line Journal of Philosophy – Epistemologica**, p. 151-171, 2015. University of Urbino Carlo Bo. Disponível em: <http://isonomia.uniurb.it/epistemologica> Acesso em: 15 ago. 2023.
- DÍAZ, S.; PRIETO, J. P. Visualización en la simulación con GeoGebra. Una experiencia de reorganización del conocimiento matemático. Comunicación breve. In: SERRES, Y.; MARTÍNEZ, A.; INOJOSA, M.; GÓMEZ, N. (ed.). **Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática**. Barquisimeto: ASOVEMAT, nov. 2016. p. 223-231.
- EDEL, R. El rendimiento académico: concepto, investigación y desarrollo. **REICE – Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación**, Madrid, v. 1, n. 2, 2003. *Online*. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=55110208> Acesso em: 21 jul. 2023.
- FIORITI, G. Prólogo. In: FERRAGINA, R. (ed.). **GeoGebra entra al aula de matemática**. Buenos Aires: Miño y Dávila, 2012.
- GUTIÉRREZ, R. Elaboración de simuladores con GeoGebra. Una actividad de modelación matemática mediada por tecnologías digitales. In: PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E. (org.). **Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia**. Maracaibo: Aprender en Red, 2017. p. 234-252.
- GUTIÉRREZ, R.; PRIETO, J. L.; ORTIZ, J. Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. **Educación Matemática**, México, v. 29, n. 2, p. 37-68, 2017.
- HOHENWARTER, M. Dynamic investigation of functions using GeoGebra. DRESDEN INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON TECHNOLOGY AND ITS INTEGRATION INTO MATHEMATICS EDUCATION, 2006, Dresden. **Anais [...]**. Dresden: [S. n.], 2006. p. 1-5.
- LEONTE'V, A. N. **Activity, consciousness, and personality**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall. 1978.
- OLIVEIRA, G. S.; CUNHA, A. M. O.; CORDEIRO, E. M.; SAAD, N. S. Grupo Focal: uma técnica de coleta de dados numa investigação qualitativa? **Cadernos da Fucamp**, Monte Carmelo, v. 19, n. 41, p. 1-13, 2020.
- PONTES-PEDRAJAS, A. Aplicaciones de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación en la educación científica. Primera parte: funciones y recursos. **Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias**, Cádiz, v. 2, n. 1, p. 2-18, 2005.
- PRIETO, J. L. GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. **Revista CLIC: Conocimiento Libre y Licenciamiento**, Caracas, v. 7, n. 14, p. 9-23, 2016.
- PRIETO, J. L. **Proyectos de simulación con GeoGebra**. Una estrategia de desarrollo del pensamiento científico desde el servicio comunitario. 2017. Universidad del Zulia, Maracaibo, 2017.

RADFORD, L. La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. *In: VALLÈS, J.; ÁLVAREZ, D.; RICKENMANN, R. (ed.). L'ctivitat docent intervenció, innovació, investigació*. Girona: Documenta Universitaria, 2011. p. 33-49.

RADFORD, L. Three key concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, knowing, and learning. **Journal of Research in Mathematics Education**, Barcelona, v. 2, n. 1, p. 7-44, 2013a.

RADFORD, L. Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. *In: RAMIREZ, A.; MORALES, Y. (ed). Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Santo Domingo: Plenary Lecture, nov. 2013b.

RADFORD, L. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, Cauca, v. 7, n. 2, p. 132-150, 2014a.

RADFORD, L. **La enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva histórico-cultural**: la teoría de la objetivación. Ciclo de Conferencias en Educación Matemática – GEMAD. Bogotá: [S. n.], out. 2014b.

RADFORD, L. Methodological aspects of the Theory of Objectification. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 8, n. 18, p. 547-567, 2015.

RUBIO, L.; PRIETO, J. L.; ORTIZ, J. La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. **International Journal of Educational Research and Innovation**, Sevilla, v. 5, p. 90-111, 2016.

SÁNCHEZ, I. V. Las prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. 2017. 120 f. Dissertação (Mestrado em Matemática, Menção Docência) – Universidad del Zulia, Maracaibo, 2017.

SÁNCHEZ, I. C.; PRIETO, J. L. Algunos ejemplos del uso experimental del GeoGebra en situaciones de simulación y diagramación. *In: SERRES, Y.; MARTÍNEZ, A.; IGLESIAS, M.; GÓMEZ, N. (ed.). Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática*. Barquisimeto: [S. n.], nov. 2016. p. 244-256.

VILLAREAL, M. Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. **Revista Virtual Educación y Ciencia**, Córdoba, v. 3, n. 5, p. 73-94, 2012.

### **Histórico**

Submetido: 16 de fevereiro de 2022.

Aprovado: 28 de maio de 2022.

Publicado: 18 de junho de 2022.

### **Como citar o artigo - ABNT**

SÁNCHEZ, I. C.; CASTILLO, L. A. A produção de conhecimento matemático na elaboração de simuladores com GeoGebra. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática** (MT), e2022003, 2022. <https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172.e2022003>

### **Licença de Uso**

Licenciado sob Creative Commons Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0). Esta licença permite compartilhar, copiar, redistribuir o manuscrito em qualquer meio ou formato. Porém, não permite adaptar, remixar, transformar ou construir sobre o material, tampouco

pode usar o manuscrito para fins comerciais. Sempre que usar informações do manuscrito deve ser atribuído o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico.

