COINSPIRAÇÃO - Revista de Professores que ensinam Matemática – ISSN: 2596-0172
V. 2, Nº. 1, Jan/Jun 2019. SBEM/Mato Grosso **-** http://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/

ESTIMULANDO A DEDUÇÃO COM A TORRE DE HANÓI

.

STIMULATING THE DEDUCTION WITH THE TOWER OF HANOI

Saulo Silva Gusmão Filho[1]

Airton Temístocles Gonçalves de Castro[2]

Resumo
A matemática é considerada por muitos estudantes como uma matéria difícil e cansativa de ser aprendida, e juntamente com o ensino tradicional e suas aulas expositivas que essas denominações foram ampliadas. Este artigo tem o construtivismo como base metodológica e visa apresentar uma proposta para a utilização da Torre de Hanói como base para o ensino e desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos, tais como sequência recursiva, funções, progressões e conversão de unidades de tempo. De forma que os discentes possam formular hipóteses, fazer e validar conjecturas, observar e tentar encontrar relações com os dados recolhidos e deduzir fórmulas, proporcionando, dessa forma, a socialização entre os alunos, com momentos de aprendizagem compartilhada e desenvolvendo, nos mesmos, um novo olhar e uma nova forma de "pensar matemática". É desenvolvido em quatro etapas: a apresentação da Torre de Hanói e sua história, a investigação de dados e observação de como se relacionam, introdução dos conceitos e por último a dedução de fórmulas visando diferentes objetivos. Esta experiência ocorreu com alunos do terceiro ano da escola EREM Padre Osmar Novaes da cidade de Paulista, PE. Tem como principal objetivo apresentar novas propostas de ensino com jogos matemáticos e propor maneiras que permitem ao aluno a chance de pensar, criar, desenvolver ideias e inovar em sala de aula.

Palavras-chave: Jogos matemáticos, Torre de Hanói, Dedução, Construtivismo.

Abstract
Mathematics is considered by many students as a difficult and tiresome subject to be learned, and together with traditional teaching and its expository classes, these denominations have been enlarged. This article has the constructivism as a methodological base and aims to present the report of experience in high school with the use of the Tower of Hanoi for the teaching and development of various mathematical concepts such as recursive sequence, functions, progressions and time unit conversion. So that students can formulate hypotheses, make and validate conjectures, observe and try to find relationships with collected data and still deduce formulas, thus providing socialization among students with moments of shared learning. It is developed in four stages: the presentation of the Tower of Hanoi and its history, the investigation of data and observation of how they relate, introduction of concepts and lastly the deduction of formulas aiming at different objectives. This experience occurred with students of the third year of the EREM Padre Osmar Novaes school in the city of Paulista, PE. Its main objective is to present new teaching proposals with mathematical games and propose ways that allow the student the opportunity to think, create and develop ideas and innovate in the classroom.

Keywords: Mathematical games, Tower of Hanói, Deduction, Constructvism.

---

[1] Acadêmico em Licenciatura em Matemática; Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, Recife, Pernambuco, Brasil; sauloggf@gmail.com
[2] Doutor em Matemática; Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, Recife, Pernambuco, Brasil; airton@dmat.ufpe.br

1. Introdução

Por ser considerada uma das disciplinas mais difíceis, uma vez que o método utilizado para ensiná-la dá mais importância à memorização do que a construção do seu conhecimento, os alunos tendem a ter certa antipatia em relação à Matemática. Existem diversos fatores que contribuem para isso e, também, diversas maneiras de poder recuperar ou criar atração pela matéria. Uma dessas maneiras é utilizando-se de jogos pedagógicos, que podem ajudar a impulsionar o desenvolvimento do aluno na hora do aprendizado e tornar a matéria mais dinâmica, tendo uma participação mais ativa dos estudantes.

O presente trabalho trata de um relato de experiência ocorrido na escola EREM Padre Osmar Novaes em Paulista - PE, com os alunos de duas turmas do terceiro ano do ensino médio e visa mostrar como a Torre de Hanói foi utilizada para o ensino de diversos conceitos matemáticos como funções, potência, sequências e conjuntos, relações de recorrência, unidades de tempo e suas conversões, além das progressões aritmética e geométrica. Assim como foi possível, por meio desta, proporcionar à prática da dedução, formulando hipóteses e prevendo resultados, fazendo e validando conjecturas, experimentando e recorrendo a esboços, fatos conhecidos e propriedades, além de proporcionar desafios que encaminharam esses processos.

Primeiramente, o trabalho apresentará o referencial teórico, expondo a base para a pesquisa e construção da aula, explicando o conceito de jogo e sua importância frente ao modelo tradicional de ensino. Logo em seguida falará do desenvolvimento do projeto e como o mesmo foi dividido, passando para a sua execução, onde será relatado em cinco partes, toda a experiência, desde sua apresentação para os discentes até a realização do desafio final com observações feitas a cerca de cada etapa. Para, em seguida, expor as conclusões realizadas.

2. Referencial Teórico

A matemática é de extrema importância tanto para a sociedade quanto para as pessoas em geral, em poucos exemplos pode-se dizer que é essencial no processo de construção do cidadão além de fornecer a base para o aprendizado das ciências da natureza, como a física e a química, sem contar com suas demais aplicabilidades.

Tendo tal importância essa ciência deveria ser ensinada como afirma Piaget

> Conduzindo à compreensão e não à memorização, desenvolvendo um espírito criativo e não repetitivo. O professor deveria criar situações que levem o discente

> a encontrar a solução correta, de acordo com o seu nível de desenvolvimento psicogenético, através de trabalhos práticos individuais ou em grupo, de diálogo entre colegas ou com o professor (PIAGET, 1972, p. 50 apud SOUSA, 2004).

Porém, a matemática que está sendo ensinada na maioria das escolas, de forma mecânica e exibicionista, é uma disciplina que fornece regras e fórmulas a serem memorizadas. A memorização tomou lugar da compreensão e "truques" ou "bizús" tomaram o lugar do raciocínio lógico, de forma que a matéria passou a ser vista com "maus olhos" pelos alunos, sendo considerada uma disciplina chata, difícil e entediante.

Assim sendo, a que se pensar em novas maneiras de ensinar matemática, de propor a matéria e permitir que se escape um pouco do tão enraizado ensino tradicional. Diante disso surgem os jogos, e ainda que simples, é uma das alternativas que podem transportar o aprendizado para diferentes níveis, empregando novas formas de ver e aprender matemática.

É difícil determinar a origem do jogo, mas sabemos que existe desde antes da antiguidade e acompanha o desenvolvimento intelectual do ser humano. "O jogo é fato mais antigo que a cultura, pois esta, mesmo em suas definições menos rigorosas, pressupõe sempre a sociedade humana; mas, os animais não esperaram que os homens os iniciassem na atividade lúdica" (HUIZINGA, 2000, p. 5)

De fato, o jogo não está presente apenas na sociedade humana, mas encontra- se presente, também, no dia a dia dos animais. Basta vermos cachorros brincando, como menciona o próprio Huizinga. Além disso, define o jogo como sendo uma

> Atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da vida quotidiana (HUIZINGA, 2000, p.24).

Parlett (1999) citado por (SANTOS, 2010, Pág.22) acrescenta, ainda, a classificação de jogo em formal e informal. Afirmando que "Um jogo informal é meramente um jogo não dirigido, ou "brincar" como quando crianças ou cachorros brincam desordenadamente". Sobre jogo formal Parlett diz que "tem uma dupla estrutura baseada em fins e meios", ou seja, um jogo com objetivos e regras a serem seguidos.

Para Salen & Zimmerman (SALEN; ZIMMERMAN, 2004, pág.96) "um jogo é um sistema no qual os jogadores engajam-se em um conflito artificial, definido por regras, que resultam em um resultado quantificável".

Vemos, então, que das diversas definições a respeito do que vem a ser o jogo, podemos concluir que os jogos provém de um movimento que é parte instintivo e parte lógico. Visto que Huizinga e Parlett tratam inicialmente o jogo como algo intrínseco ao ser humano (jogo informal), que está ligado, também, aos animais, no que vem a ser as "brincadeiras". E na parte lógica, quando o temos como na definição de Salen & Zimmerman e do próprio Parlett (jogo formal), em que o jogo se apresenta com objetivos e regras bem definidos, como é o caso da Torre de Hanói.

Em síntese, pode-se afirmar que os jogos possibilitam uma interação e cooperação com o próximo. Em sala de aula a interação com os colegas se expande até o professor, e sua aplicação surge, portanto, como meio de socialização entre os alunos. Além de permitir o conhecimento das regras e a construção de um respeito a elas, gera e melhora o aprendizado de forma construtiva e natural, ao passo que resolver problemas, pensar, dialogar, e criar ajudam no desenvolvimento do senso crítico.

O jogo na educação matemática parece justificar-se ao introduzir uma linguagem matemática que pouco a pouco será incorporada aos conceitos matemáticos formais, ao desenvolver a capacidade de lidar com informações e ao criar significados culturais para os conceitos matemáticos e o estudo de novos conteúdos. (MOURA,1994, p. 24 apud MOTA, 2009).

Assim mesmo, o desenvolvimento de formas distintas de atuação dos jogos, de certo modo, deixará a disciplina mais "leve", permitirá que os discentes comecem a se interessar pela matéria e tenham, não somente um bom aprendizado, mas também prazer em estudar os conceitos que vierem a ser apresentados. Se o professor conseguir fazer uso dos jogos para ensinar, é mais provável que os alunos aprendam praticando, deduzindo e até mesmo ensinando uns aos outros, e não fiquem focados em decorar fórmulas ou aprender assuntos que poderão ser esquecidos na semana seguinte à aula. E mesmo que o forem, terão plena capacidade de deduzi-los novamente, encontrando a resposta mais uma vez.

Apesar de tudo o que foi exposto, é fundamental ressaltar que as ideias aqui preconizadas não pedem pela extinção do método de ensino tradicional, tendo em vista que todos os assuntos aqui tradados dependerão do aluno e se ele pode ou não se familiarizar com o modelo de ensino proposto. Deve-se sempre lembrar que o professor precisa ter uma prática reflexiva, e que a mesma leva à entender que os alunos não são iguais e, portanto não podemos exigir que um único método de ensino seja válido para todos.

Nunca é demais insistir, sob a análise de outros resultados que, uma vez que o próprio Currículo Nacional do Ensino Básico (pág.68), cita que a “prática de jogos, em particular dos jogos de estratégia, de observação e de memorização, contribui de forma articulada para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para o desenvolvimento pessoal e social”, contribui para a correta afirmação de que os jogos são de grande importância e utilidade para o ensino da matemática e, também, de outras ciências.

3. Desenvolvimento do Projeto

O objetivo geral do projeto foi proporcionar, pela Torre de Hanói, o aprendizado e a revisão de alguns conceitos matemáticos como as funções, a potenciação, os conjuntos, as sequências e relações de recorrência, unidades de tempo e suas conversões, incluindo as progressões aritmética e geométrica. Além de proporcionar a formulação de hipóteses, fazer e validar conjecturas por meio da experimentação, recorrendo a modelos, esboços e propriedades.

Foi desenvolvido em quatro partes:

- Apresentação da Torre de Hanói;
- Acompanhamento, respondendo às perguntas, e dúvidas;
- Obtenção de dados e observação de relações encontradas manipulando a Torre;
- Introdução dos conceitos e dedução de fórmulas.

Nesta última parte apresentou problemas para serem respondidos pelos alunos, que poderão ser modificados para se adequar da melhor forma possível ao público. No final, foram apresentadas observações extras e novos desafios a respeito do jogo, que podem ser apresentados aos alunos após o domínio do jogo.

4. A Execução do Projeto

4.1 Apresentação da Torre de Hanói

Primeiramente, a Torre de Hanói foi apresentada aos alunos e em seguida os mesmos foram divididos em grupos. Logo foi explicado o que é a torre, sua história de origem e as regras de como jogá-la, para que, então, pudessem manipular o jogo.

O objetivo do jogo é o de transferir todos os discos de uma estaca para a outra (**não importa qual**), com o menor número de movimentos possíveis, sem colocar um disco maior sobre o menor.

Após a apresentação, foi solicitado aos alunos que preparassem o celular para receber um emulador com o jogo, pois não havia torres o suficiente para todos os grupos. O emulador é disponibilizado por Johan Moller no *Google Play* (https://play.google.com/store/apps/details?id=johan.moller.towerofhanoi&hl=pt_BR) e mesmo sem acesso a *internet*, por meio do *Bluetooth*, pôde ser transferido aos alunos. O compartilhamento durou cerca de 10 minutos. Os alunos sem celular ou os que tinham, mas apresentaram falha no momento da transferência do emulador, formaram grupos com os que conseguiram instalá-lo.

Após a introdução todos já estavam entusiasmados e jogando. Apenas dúvidas sobre em qual estaca às peças deveriam estar, ao término do jogo, foram feitas neste momento. As demais dúvidas foram em relação as regras da torre e foram respondidas pelos próprios alunos, dando início a um dos objetivos propostos: proporcionar a socialização entre os discentes, criando momentos de aprendizagem compartilhada.

Começaram a discutir sobre a quantidade de movimentos que cada um estava realizando. Neste momento foi pedido para que anotassem em uma folha de papel a quantidade total de movimentos que estavam sendo realizados com a quantidade de peças.

4.2 Acompanhamento

Na segunda etapa da aula foi prestada assistência aos alunos que ainda estavam com dúvidas e, após erros e acertos, depois que todos de familiarizaram com a Torre de Hanói, foi dada continuidade à aula. Na mesma etapa, cobrou-se dos mesmos que anotassem em um papel a quantidade total de movimentos realizados nas jogadas com uma até quatro peças, para que no final pudessem comparar com a quantidade mínima de movimentos necessários para vencer o jogo de modo “perfeito”.

Neste momento pode-se observar o processo de socialização dos alunos com a aprendizagem compartilhada de maneira clara. Uma vez que os alunos que não estavam entendendo como jogar pediram assistência aos colegas e todos estavam acompanhando o desempenho de cada um.

4.3 Introdução dos conceitos e início do processo de dedução.

Uma tabela que relaciona a quantidade de discos com a quantidade de movimentos foi desenhada no quadro. No início de seu preenchimento foi perguntado aos alunos **com**

quantos movimentos ganha-se o jogo com uma até cinco peças. As respostas foram divergentes e algumas muito discrepantes.

Após anotar todos os resultados, foram postos na tabela as quantidades mínimas de movimento de cada peça, completando-a. Para que em seguida pudessem avaliar se conseguiram mover os discos com a quantidade mínima de movimentos.

Tabela 1 Relação da quantidade mínima de movimentos pela quantidade de discos

Número de discos	**Quantidade mínima de movimentos**
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Figura 1 Momento da análise de dados

Dessa forma foi dado início ao processo de análise de dados e proposto um desafio: notar alguma relação entre os números da tabela. Após um curto período de tempo os dados da tabela foram novamente escritos no quadro, porém em formato de sequência. E novamente pediu-se para que procurassem por algum padrão.

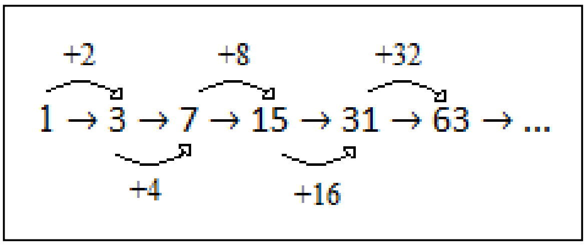

Figura 2 Sequência escrita no quadro

Uma das primeiras observações que pode ser feita investigando os resultados da tabela é que o número adicionado $(+\mathbf{2}, +\mathbf{4}, +\mathbf{8})$ é sempre o dobro do anterior e que a quantidade mínima de movimentos $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{7}, \dots)$ é sempre um a menos do número que foi adicionado. Ou ainda, que o número de movimentos multiplicado por dois, mais uma unidade, é igual à quantidade de movimentos seguinte para finalizar o jogo com n+1 peças.

Muitos alunos foram rápidos e logo perceberam que a sequência poderia se tratar de algum tipo de progressão. Aproveitando a oportunidade, foi explicado o que era uma sequência e sua diferença em relação aos conjuntos numéricos. Ainda foram revisados os termos de progressão aritmética e geométrica.

E já associando a sequência com uma progressão aritmética, alguns queriam encontrar alguma relação com a fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$. Após um período de 10 minutos conversando entre si, indagando e deduzindo, chegaram a uma das conclusões esperadas: Multiplicando a quantidade de movimentos T por dois e adicionando uma unidade, descobriram a quantidade de movimentos necessários para completar o jogo com $n+1$ discos, ou seja, o nível seguinte do jogo, com mais um disco.

Consequentemente, sendo T o número mínimo de movimentos com n discos, a quantidade de movimentos T de uma torre com n discos é igual à quantidade anterior com $n-1$ discos multiplicada por dois e adicionado uma unidade.

Exemplo 1: Utilizando a Torre de Hanói é possível perceber que a quantidade mínima de movimentos com três discos é sete. Portanto, para quatro discos será: $T_4 = (2 \times T_3) + 1 = (2 \times 7) + 1 = 14 + 1 = 15$.

Exemplo 2: Qual a quantidade mínima de movimentos para vencer o jogo com cinco discos? Para responder é necessário saber a quantidade mínima necessária para quatro discos, que é 15. Então, $T_5 = (2 \times T_4) + 1 = (2 \times 15) + 1 = 30 + 1 = 31$.

Com isso, de forma geral temos que: $T(n) = 2T(n-1) + 1$.

Neste momento, explicou-se sobre as relações de recorrência e foi lançado um desafio que deveria ser cumprido até o final da aula: descobrir com quantos movimentos devem ser realizados para transportar 64 peças da Torre de Hanói.

A primeira ideia foi a de encontrar a quantidade de movimentos para cada uma das 63 peças anteriores a 64, e dessa forma encontrariam a resposta. Mas notou-se o quanto isso poderia ser trabalhoso e inviável, dado que deveriam ter a resposta até o final da aula.

O intuito desse desafio foi gerar nos estudantes a necessidade de encontrar uma fórmula geral, uma função que relacionasse **n** e **T**. Sem que fosse necessário conhecer a quantidade de movimentos da peça anterior.

Em virtude do que foi dito, foi narrado aos alunos a lenda da Torre de Hanói, que diz que um deus indiano havia dado uma tarefa a um grupo de monges, para que os mesmos transportassem 64 discos de ouro de uma estaca para uma terceira estaca (dando surgimento a Torre de Hanói). E quando a missão fosse concluída, o universo chegaria ao fim. E por que chegaria ao fim? Quantos movimentos os monges deveriam realizar? Em quantos anos os monges levariam para transportar as 64 peças?

Agora existe um objetivo e eles precisam descobrir como resolvê-lo, dessa forma eles ficam atentos à aula e imersos no problema proposto. Deste modo, é alcançado um dos propósitos do trabalho que é o de atribuir uma nova forma de ensinar, que percorre um caminho oposto ao do ensino tradicional.

4.4 Parte final da dedução e descobrimento da fórmula

Uma nova informação é dada: foi solicitado que observassem os números "adicionados" mais atentamente. E em instantes, dois grupos descobriram que poderiam formar uma sequência com eles $(2, 4, 8, 16, 32, 64)$ e que essa nova sequência era uma progressão geométrica de razão dois.

Um grupo pensou em utilizar a fórmula da progressão geométrica:
$a_n = a_1 \times q^{n-1}$ e com razão $q = 2$,
Pensaram ter descoberto algo com $a_2 = 2 \times 2^1 = 4$; $a_3 = 2 \times 2^2 = 8$; $a_4 = 2 \times 2^3 = 16$, e que se subtraíssem uma unidade teriam a quantidade mínima de movimentos T.

Os demais alunos entenderam o raciocínio dos colegas e sabiam que estavam próximos de descobrir algo, mas não sabiam ao certo o que era. Após serem parabenizados pela conquista, trabalhou-se juntamente com o professor para transformar o que havia sido descoberto em "linguagem matemática", dessa forma pensou-se em $2^n - 1$.

Da mesma forma, fazendo $(2, 4, 8, 16, 32, 64) = (2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6)$, pode-se encontrar a mesma conclusão.

A maneira utilizada para encontrar a fórmula é extremamente intuitiva e permanece dessa forma, visto que não foram cobradas provas de que a mesma é verdadeira e funciona para todos os números naturais, uma vez que não conhecem o Princípio da Indução Finita.

Neste caso, bastou uma breve explicação da importância e da necessidade de se provar as fórmulas e como poderiam fazê-lo, mas que não teria necessidade no momento já que não era o objetivo principal do trabalho.

Número de discos (n)	**Quantidade mínima de movimentos T(n)**
1	$T(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$
2	$T(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
3	$T(3) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$
4	$T(4) = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$
5	$T(5) = 25 - 1 = 32 - 1 = 31$

Tabela 2 Relação entre n e T com a fórmula descoberta

Figura 3 Grupos durante o processo de dedução

4.5 Finalizando com o desafio

Descobrir quantos movimentos os monges da lenda realizaram para finalizar a torre com 64 discos agora é possível, basta fazer (com o uso da calculadora):

$T(64) = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.616.$

Todos se espantaram com o resultado e não precisaram de cálculos detalhados para saber que os monges jamais conseguiriam transportar as peças.

E antes de calcular esse tempo, foi explicado sobre as unidades de tempo e como fazer as conversões entre segundos, minutos, horas, dias, e anos. Dessa forma, dando prosseguimento ao desafio: Para facilitar o cálculo, toma-se que cada movimento realizado pelos monges para transportar uma única peça é de um segundo.

Portanto, o tempo necessário seria de $18.446.744.073.709.551.616$ segundos, mas o tempo foi pedido em horas, então é necessário converter os segundos até encontrar os anos.

Para calcular quantos anos são necessários para concluir o jogo observa-se que um ano possui 365 dias, um dia tem 24 horas e dessa forma tem $365 \times 24 = 8.760$ horas.

Cada hora possui 60 minutos, então um ano tem $8.760 \times 60 = 525.600$ minutos, e como cada minuto tem 60 segundos um ano tem ao todo $525.600 \times 60 = 31.536.000$ segundos.

De posse dessas informações, pode-se calcular a quantidade de anos necessária para transportar todos os discos. Basta dividir a quantidade total de segundos pela quantidade de segundos que cada ano tem, obtendo uma aproximação de 584.942.417.355 anos e dando término a aula.

5. Considerações Finais

Mediante o exposto, pode-se afirmar que os objetivos propostos foram alcançados com êxito. Percebe-se que houve socialização entre os alunos durante as atividades, sem exceção, pois mesmo os poucos alunos que não participaram dos momentos de dedução, jogaram o jogo e tentaram realiza-lo da melhor maneira possível, sendo ajudados e ajudando os demais colegas.

Percebe-se o processo de aprendizagem compartilhada nos momentos de explicação do funcionamento do jogo e suas regras, assim como nos momentos de dedução e realização dos objetivos propostos, quando temos discussões a respeito das relações que poderiam ser encontradas nas sequências formadas. Havendo, também, aprendizado de novos conceitos e ideias, como as relações de recorrência, a necessidade das demonstrações na matemática.

Em síntese, percebe-se como é possível, de maneira simples e com o uso dos jogos pedagógicos, nesse caso com a Torre de Hanói, promover uma aula dinâmica e diferente das aulas tradicionais de matemática, levando os estudantes a pensar e construir, que segundo

Piaget (1972) citado por SOUSA (2004) conduz à compreensão e não à memorização, desenvolvendo um espírito criativo e não repetitivo.

6. Referências

CSCJ. **A formação do professor, a prática reflexiva e o desenvolvimento de competências para ensinar.** Disponível em: < http://www.cscj-ijui.com.br/downloads/formacao_prof.pdf>. Acesso em: 01/11/2018

HUIZINGA, J. **Homo Ludens**. 4. ed. São Paulo: EDITORA PERSPECTIVA, 2000. Disponível em: <http://jnsilva.ludicum.org/Huizinga_HomoLudens.pdf>. Acessado em: 16/10/2018.

JOGO in Dicionário infopédia da Língua Portuguesa. Porto Editora. Disponível em: <https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/jogo>. Acesso em: 16/10/2018.

MOTA, P. C. C. L. de M. **JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA**. 2009. 142 p. Dissertação (http://repositorio.uportu.pt/bitstream/11328/525/2/TMMAT%20108.pdf) — Universidade Portucalense Infante D. Henrique. Disponível em: <http: //repositorio.uportu.pt/bitstream/11328/525/2/TMMAT108.pdf>. Acesso em: 03/11/2018.

PONTES, J. P. **Novas tecnologias na aula de Matemática**. [S.l.]: Revista Educação e Matemática, 1989. Acesso em: 21/10/2018.

SALEN, K.; ZIMMERMAN, E. **Rules of Play - Game Design Fundamentals**. Massachusetts London: The MIT Press Cambridge, 2004.

SANTOS, H. V. de A. **A importância das regras e do gameplay no envolvimento do jogador de videogame**. 2010. 257 p. Tese (Artes Visuais) — Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/27/27159/tde-22062010-102953/pt-br.php>. Acesso em: 20/10/2018.

SOUSA, P. M. L. de. **O ensino da Matemática: Contributos pedagógicos de Piaget e Vygotsky**. Psicologia.pt, Coimbra, p. 1 – 26, 07.2004. ISSN 1646-6977. Disponível em: < http://www.psicologia.pt/artigos/textos/A0258.pdf>. Acesso em 20/05/2019