

**CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR QUE ENSINA
MATEMÁTICA PARA ATRIBUIR SENTIDO À MEDIDA**

**MATHEMATICS TEACHERS' SPECIALIZED KNOWLEDGE
TO GIVE SENSE TO MEASUREMENT**

Marcos Paulo de Oliveira¹

Arcanjo Miguel Jama António²

Beatriz Fernanda Litoldo³

Alessandra Rodrigues de Almeida⁴

Miguel Ribeiro⁵

Resumo

O presente trabalho⁶ tem por foco o conhecimento matemático especializado revelado por um grupo de professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no âmbito da Medida, um dos temas incluídos na Base Nacional Comum Curricular. Para desenvolver o conhecimento dos alunos nesse âmbito cumpre ao professor que ensina matemática um conhecimento especializado sobre o tema, envolvendo, entre outros aspectos, a definição, os procedimentos e os instrumentos de medição. Considerando que tais conhecimentos fazem parte de um conjunto de especificidades para a prática docente, assumimos a perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK), tendo como foco aqui as dimensões do conhecimento matemático do professor. As informações foram coletadas por meio de gravações em áudio e vídeo no contexto de um *workshop* e analisadas sob a lente teórica do modelo MTSK. Os resultados preliminares revelam que os professores sentem necessidade das noções de comparar e de uso de instrumentos de medidas, e mostram uma necessidade de diferenciar conceitos de procedimento e instrumento de medidas.

Palavras-chave: Medidas. *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*. Unidades de Medida. Instrumentos de medida.

Abstract

This paper focus on specialized mathematical knowledge revealed by a group of kindergarten and primary's teachers within the scope of Measurement, that is one of the themes on Brazilian National Curricular Common Base,. In order to develop the student's knowledge about this theme, it's role of the mathematics teacher have a specialized knowledge about the theme, like, among other aspects, it's definition, it's procedure and measurement instruments. Whereas this knowledge is part of a set of specificities, we consider this knowledge specialized, and we assume the *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) perspective, with focus on teacher's mathematical knowledge. We took audio and video records in a workshop context and we analyzed under the theoretical perspective of the MTSK model. The preliminary results of the analyzes shows the teachers need to think about the notion of comparing and in the use of measurement instruments, and the need of differentiation between the concepts of procedure and instruments.

Keywords: Measurement. *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*. Units. Measurement instruments.

¹ marcosp_oliveira@hotmail.com

² arcanjojama@gmail.com

³ beatrizfernanda_rc@hotmail.com

⁴ alessandraalmeida628@gmail.com

⁵ cmribas78@gmail.com

⁶ Uma versão preliminar deste texto foi apresentada no I Encontro Mato-Grossense de Professores que Ensinam Matemática (EMAPEM), realizado em Tangará da Serra/MT, junho de 2018.

1. Introdução

A Medida e o ato de medir estão presentes nas diversas situações sociais, desde uma escala local, como a quantidade de anos, a determinação da massa e da altura de uma pessoa, até uma escala global, como, por exemplo, a medida do diâmetro da Terra (ALFONSIN, 2010). Diante de sua relevância social e das diversas possibilidades de integração das relações métricas estudadas na Matemática com outros campos de conhecimento, como o das Ciências Naturais (por exemplo, densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica) ou o da Geografia (por exemplo, densidade demográfica, coordenadas geográficas e escalas sociais e territoriais), torna-se essencial o estudo da medida durante as diferentes etapas escolares (BRASIL, 2018).

Desse modo, importa desenvolver o conhecimento em medidas com os alunos desde a Educação Infantil, uma vez que ele se associa a habilidades e capacidades matemáticas, como quantificar grandezas para a compreensão da realidade (BRASIL, 2018). Tal preocupação também se faz presente em currículos ou documentos equivalentes, em países como Portugal (BIVAR et al., 2013), Itália (ROSSI-DORIA; PROFUMO, 2012) e no *National Council of Teacher of Mathematics* – NCTM (2000).

A *Base Nacional Comum Curricular* – BNCC (BRASIL, 2018), documento que norteia os currículos nacionais, inclui a unidade temática “Grandezas e Medidas”, como foco de estudo das medidas e das relações entre elas, isto é, das relações métricas, bem como a “consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico” (BRASIL, 2018, p. 271). Entretanto, esta temática é considerada um tópico matemático crítico, uma vez que os alunos apresentam dificuldades em atribuir sentidos a medidas (SÁNCHEZ; ALBALADEJO; MEGÍAS, 2017). O conhecimento dos alunos sobre o tema da Medida desenvolve-se primeiramente pela associação da palavra à quantidade que ela representa, para, então, comparar dois objetos, observando semelhanças e diferenças – mais longo/mais curto, mais leve/mais pesado (CARAÇA, 1963) – e, só depois, fazer a associação do número à quantidade (CLEMENTS; STEPHAN, 2004). Entretanto, esta temática é considerada um tópico matemático crítico, pois os alunos apresentam dificuldades em atribuir sentidos a medidas (SÁNCHEZ; ALBALADEJO; MEGÍAS, 2017).

Segovia, Castro e Flores (1996) apontam que nas escolas, ao trabalhar tais temas, a atenção é dirigida ao uso de fórmulas, inclusive em níveis de iniciação ao conteúdo, em

detrimento da compreensão do que significa medir, dos procedimentos e do conhecimento de instrumentos de medida. Segue-se, portanto, uma concepção que cria obstáculos para o desenvolvimento do aluno; dificuldades na sua compreensão das medidas, na leitura de instrumentos e interpretação das escalas, na aplicação do pensamento multiplicativo durante a estimação da área de um retângulo e confusão entre os conceitos de área e de perímetro. Ademais, não utilizam as unidades de medida de maneira adequada (SEGOVIA; CASTRO; FLORES, 1996).

Pesquisas em Educação Matemática evidenciam que o conhecimento do professor é um fator que impacta nas aprendizagens dos alunos (CARNOY; ARENDS, 2012; HILL; ROWAN; BALL, 2005; ROCKOFF et al., 2008). Portanto, é fundamental que os professores aprofundem seu conhecimento matemático especializado, para ter condições de ensinar o tema medida de modo a potencializar a aquisição de conhecimentos matemáticos por seus alunos, cujas dificuldades e problemas estão relacionados aos dos professores (CZELUSNIAK, 2016). Nessa direção, o conhecimento do Professor que Ensina Matemática (PEM) é constituído por um conjunto de especificidades, no que se refere tanto ao conteúdo matemático quanto ao conhecimento pedagógico (AUTOR 1, ANO), e é essencial investigar os aspectos dessa especificidade no tange ao tema medidas.

Neste estudo adotamos a conceitualização do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK⁷ (CARRILLO et al., 2018), para discutir o conhecimento especializado do PEM no âmbito da medida. Esta investigação objetiva identificar e melhor entender o conhecimento matemático especializado revelado pelo PEM para dar significado à Medida durante um *workshop* de formação contínua⁸. Para tal, buscamos responder à seguinte questão investigativa: Que conhecimento especializado revelam professores que ensinam matemática, ao dar significado à Medida em um *workshop* de formação contínua?

2. Referencial Teórico

Caraça (1963, p. 29) afirma que medir é “comparar duas grandezas da mesma espécie” – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, entre outros. O autor considera

7 Optamos por manter a nomenclatura em inglês, pois esta é uma conceitualização do conhecimento professor reconhecida internacionalmente e, sua tradução desvirtuaria não apenas o sentido, mas, essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo.

8 Este foi um dos *workshops* organizados pelo grupo de pesquisa e formação GRUPO, que ocorreu na UNIVERSIDADE no primeiro sábado do mês de abril, com duração de quatro horas.

duas condições necessárias para medir: estabelecer uma unidade de medida que seja válida para todas as grandezas de mesma espécie; e exibir um valor numérico que expresse a comparação com a unidade. Já Clements e Stephan (2004) discutem aspectos procedimentais para a realização da medida e evidenciam que medir é atribuir um número a quantidades contínuas. Para os autores, o processo cognitivo dos alunos para medir se inicia com uma comparação de objetos, notando suas semelhanças e diferenças, para mais tarde associar tais comparações a quantidades numéricas.

A atribuição de uma unidade de medida é apontada como fundamental para Bragg e Outhred (2004), que afirmam que as unidades e os instrumentos de medida são importantes para dar significado ao conceito de medida e mostram uma discrepância entre os conhecimentos procedimentais e os conhecimentos conceituais dos alunos, relativos a medidas de comprimento usando régua: são capazes de realizar a medida, mas não entendem o processo. Para estes autores, as atividades com medida devem focar a definição de unidade e marcação de origem no instrumento, a iteração da unidade e a contagem dessas iterações.

Piaget e Inhelder (1983) já destacavam alguns princípios invariantes envolvidos na ação de medir: a conservação e a inferência transitiva. A conservação é entendida como ponto de partida para definir grandezas como peso, densidade e volume e está ligada à manutenção da quantidade de um determinado atributo, quando um corpo é transferido para um outro lugar. A inferência transitiva se faz necessária para quantificar um determinado atributo e refere-se ao fato de que a comparação de dois atributos só pode ser feita a partir de uma unidade de medida ou de um instrumento em comum entre ambos.

De forma semelhante, Clements e Stephan (2004) estabelecem seis princípios que sustentam a compreensão da medida de comprimento e ampliam a discussão anterior: (a) partição do objeto; (b) unidade de iteração; (c) transitividade; (d) conservação; (e) acumulação da distância; e (f) relação com um valor numérico. A partição está ligada à atividade mental de dividir o objeto em unidades de mesmo tamanho. A iteração é o princípio de colocar a unidade de medida repetidamente ao longo do objeto, para cobri-lo por completo e de forma bem-ordenada (sem espaços entre as unidades e sem sobreposições). A transitividade é o entendimento de que, se o tamanho do primeiro objeto é o mesmo de um segundo, e, por vez, este tem o mesmo tamanho de um terceiro, então este e o primeiro serão do mesmo tamanho. A conservação diz respeito à manutenção do tamanho dos objetos, mesmo quando são movidos. A acumulação de distância é o entendimento de que o tamanho total de um objeto é dado pela quantidade de vezes que a unidade foi iterada sobre ele. E a

relação com um valor numérico é a atribuição de um número à medida realizada (CLEMENTS; STEPHAN, 2004).

Godino, Batanero e Roa (2002) discutem o trabalho com medidas, enfatizando as medições diretas e indiretas. A medição direta de uma grandeza envolve sua comparação direta com outra grandeza de mesma espécie, utilizada como unidade de medida; e o resultado desta comparação é um número que indicará quantas vezes a unidade adotada está contida (múltiplo) na grandeza física medida ou a contém (submúltiplo). Como ocorre, por exemplo, ao determinar o comprimento da altura de uma porta com uma régua de 50 cm ou a capacidade de um balde, utilizando um frasco com volume de 1 litro. A medição indireta envolve medições diretas de outras grandezas, relacionadas por uma dependência conhecida com a grandeza procurada, acrescidas de operações matemáticas e suportadas por teorias que relacionam as diversas grandezas com aquela a ser medida, como medir a área de uma figura plana a partir dos comprimentos de seus lados, sem realizar uma medida direta de área, mas encontrando-a a partir de um outro atributo.

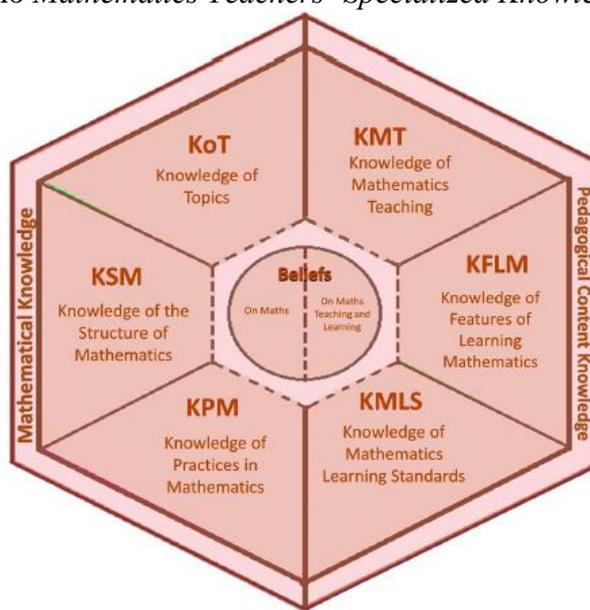
Os instrumentos de medida também têm sua importância para o processo de medir. Clements (1999) chama atenção à relação entre instrumentos *standards* e não *standards* de medida e afirma que ambos podem ser combinados para garantir a construção do senso de medida nos alunos. Usando o exemplo do comprimento, os instrumentos *standards* são aqueles que já incluem o uso de uma escala de marcação, como régua e trena; os instrumentos não *standards* – barbante, palmos, passos ou cordas – não são demarcados com uma escala. Estes últimos favorecem o entendimento do processo de medida, e os *standard* possibilitam uma relação mais imediata com um valor numérico (CLEMENTS, 1999). Para ampliar o senso de medida torna-se essencial um trabalho conjunto, que envolva e articule estes dois tipos de instrumentos, tanto em um mesmo contexto quanto em contextos distintos, e leve a opções justificadas.

Considerando as especificidades que envolvem o conceito de Medida e os procedimentos de medição, bem como a relevância desta unidade temática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, considera-se essencial discutir, analisar e melhor entender o conhecimento matemático do PEM sobre o tema e os aspectos que o tornam especializado. Assumimos o modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK (CARRILLO et al., 2018).

O MTSK (Figura 1) é um modelo analítico e metodológico constituído por dois domínios, o *Mathematical Knowledge* – MK – e o *Pedagogical Content Knowledge* – PCK.

Cada domínio é constituído por três subdomínios, e no centro incluem-se as crenças do professor sobre a matemática e sobre seu ensino e aprendizagem. Para essa investigação, tomamos como foco de estudo o domínio do MK; no entanto, é essencial evidenciar que tal conhecimento não deve ser entendido de modo fragmentado.

Figura 1: Modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK)*



Fonte: Carrillo et al. (2018).

O *Knowledge of Topics* (KoT) compreende dimensões relativas a conceitos, procedimentos, regras, teoremas, representações e seus significados, aplicações, entre outros. No tema Medidas destaca-se o conhecimento de que medir envolve comparar. Relativamente à definição (KoT – definição), ao professor cumpre um conhecimento associado, por exemplo, às noções de medir como comparar, à necessidade de atribuir uma unidade de medida e um valor numérico à medida (CARAÇA, 1963; CLEMENTS; STEPHAN, 2004). No âmbito dos procedimentos, compreendem-se, por exemplo, os processos necessários para realizar uma medição direta (CLEMENTS; STEPHAN, 2004; PIAGET; INHELDER, 1983) – como, quando e por que é feito, bem como características do resultado (KoT – procedimentos).

O *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) refere-se ao conhecimento estruturante da matemática. Suas dimensões do conhecimento estão relacionadas às conexões intramatemáticas (interconceituais), bem como às conexões auxiliares e transversais e suas relações/conexões entre os conceitos mais elementares como os conceitos

mais sofisticados. Por exemplo, nas medidas, as conexões auxiliares (KSM – conexões auxiliares) são evidenciadas quando se utiliza o conhecimento sobre instrumentos para descrever o processo de medida, ou o conhecimento sobre quantidades e volume na descrição desse processo. Os conhecimentos sobre o uso de instrumentos *standards* e não *standards* também são considerados conexões, pois não fazem parte do conceito de medida, mas seu uso pode auxiliar a pensar no procedimento utilizado para medir.

O *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM) é concebido como o conhecimento evidenciado quando se realiza uma prática matemática, como a resolução ou a modelação de problemas, a definição ou a demonstração de um processo, o uso correto da linguagem e símbolos, entre outras. No contexto das medidas, são bons exemplos: o uso de linguagem adequada para descrever os procedimentos de medidas (KPM – linguagem formal) e o conhecimento sobre condições necessárias e suficientes para definir uma medida ou realizar o processo de medição (KPM – condições necessárias e suficientes para gerar definições), ligados às condições apontadas anteriormente como necessárias para definir uma medida (CARAÇA, 1963; CLEMENTS; STEPHAN, 2004).

3. Aspectos Metodológicos

A presente investigação é parte de uma pesquisa mais ampla, que tem como foco investigar e compreender o conhecimento do PEM no âmbito da Geometria⁹ e Medidas. Ela se deu a partir de um curso no formato de *Workshop* promovido pelo grupo GRUPO.¹⁰

Os *workshops* envolvem a resolução de tarefas conceitualizadas para a formação de professores, com o objetivo de desenvolver o seu nível de conhecimento, tendo em conta a especificidade do conhecimento do professor que ensina matemática: completar o conhecimento do aluno. Por isso, as tarefas implementadas para professores têm como foco direto desenvolver o conhecimento do professor (autor, autor, autor 1; ano; autor; autor 2; autor 1, ano; autor 1, ano). Neste trabalho discutimos o conhecimento revelado por sete professores¹¹ que participaram de um *workshop* de quatro horas no âmbito de Medidas.

A tarefa implementada era composta por três partes e teve como objetivo acessar a desenvolver o conhecimento dos professores no tema Medidas. As partes I e II buscavam

9 Projeto "PROJETO", processo número NÚMERO, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).
10 DESCRIÇÃO DO GRUPO

11 Os nomes dos professores apresentados nesta investigação são fictícios, de modo a preservar a identidade de cada um.

aceder às especificidades do conhecimento matemático do PEM – e desenvolvê-las –, no que concerne ao tema Medidas. A parte III propunha abordar o conhecimento dos professores para interpretar e dar sentido às produções de alunos e fornecer um *feedback* construtivo, na perspectiva do trabalho desenvolvido por AUTORES (ANO).

No dia em questão os professores foram organizados em dois grupos, um com quatro e outro com três participantes. As informações foram coletadas por meio de gravações de áudio e vídeo durante a resolução da tarefa. Neste texto focaremos as produções e as discussões de um dos grupos, referentes à primeira parte da tarefa. Essa parte era composta por cinco questões associadas ao significado de medir: “*O que significa medir?*”, “*Como medir?*”, “*O que se mede?*”, “*Por que se mede?*” e “*Com o que se mede?*”. Focamos nos trechos em que os professores demonstraram conhecimento especializado para dar sentido a Medida.

As discussões (do grupo foco deste estudo) foram transcritas em sua totalidade, e a partir dessa transcrição selecionamos os trechos em que houve evidência de conhecimento especializado dos professores sobre Medidas (AUTOR 1; AUTOR; AUTOR; ANO). Os trechos selecionados apareceram em quatro das questões da primeira parte da tarefa, com exceção da questão “*Por que se mede?*”. Enumeramos esses trechos de acordo com a ordem presente no texto, não necessariamente na ordem cronológica em que apareceram na discussão, e organizamos cada sequência de falas em um quadro. As falas são numeradas por linha com a numeração entre colchetes; quando foi necessário fazer referência a trechos dos diálogos, usamos esta numeração. As interrupções nas falas são marcadas por (...). Na transcrição da fala de outrem pelos professores, ou na leitura de um texto escrito, usamos aspas para ressaltar esta parte do restante da fala.

A análise dos trechos selecionados se inicia com os que indicam tópicos que os professores mostraram necessários para atribuir sentido à medida: as noções de comparar, o estabelecimento de uma unidade de medida e o uso de instrumentos. Posteriormente organizamos trechos relativos aos seus conhecimentos nesses tópicos levantados por eles. Situamos o conhecimento dos professores dentro do modelo MTSK e concluímos mostrando qual conhecimento especializado dentro do MK se fez necessário para atribuir sentido à Medida.

4. Discussão e análise

As primeiras noções do que significa medir estão relacionadas às noções de comparar e a discussões de situações – exemplos de sala de aula, que ajudam a dar significado a esse conceito. As respostas iniciais dos professores já revelam esse conhecimento (Quadro 1).

Quadro 1 – Trecho transcrito das respostas dos professores à questão “*O que significa medir?*”

- [1] Rogério: *Comparar.*
- [2] Regina: *Porque medir geralmente a gente pensa maior e menor (...).*
- [3] Regina: *É engraçado que essas primeiras noções de medidas - maior e menor, grande e pequeno - são mais fáceis de assimilar, depois vai complicando.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018)

Rogério revela um conhecimento sobre a comparação [1] como significado de medida (KoT – definições), como uma primeira condição necessária para definir medida (KPM – condições necessárias e suficientes para gerar definições). Ao referir-se ao processo de medir como uma comparação de elementos, tendo como base um padrão definido *a priori* (maior/menor, grande/pequeno, triplo da unidade, metade da unidade), os professores evidenciam conhecimento sobre processo direto de medida (GODINO; BATANERO; ROA, 2002).

De mesmo modo, a professora Regina também menciona a noção de comparar [2-3] como uma primeira condição necessária para definir o que é medir (KPM – condições necessárias e suficientes para gerar definições). Tal expressão revela um conhecimento associado à noção de comparação como uma noção inicial, porém não suficiente para definir uma medida. Outras condições consideradas pelos professores necessárias para definir medida aparecem durante a discussão (Quadro 2):

Quadro 2 – Trecho transcrito das respostas dos professores à questão “*O que significa medir?*”

- [5] Rogério: *Eu tenho que primeiro adotar uma unidade de medida? Se é polegada, se é barbante,*
- [6] *se é pés.*
- [7] Regina: *Sim.*

Fonte Elaborado pelos autores (2018)

A fala do professor Rogério [5-6] evidencia mais uma condição necessária para o procedimento de medida: a necessidade de primeiramente estabelecer uma unidade (KPM – condições necessárias e suficientes para gerar definições), indicando, portanto, mais uma especificidade da relação de comparar citada anteriormente (BRAGG; OUTHRED, 2004; CARAÇA, 1963). O estabelecimento da unidade de medida está relacionado com o princípio da partição de unidade, em que fazemos a operação mental de dividir o objeto a ser medido

em partes menores de tamanhos iguais, como, por exemplo, uma polegada, um pedaço de barbante ou o comprimento de um pé, revelando também conhecimento sobre procedimentos (KoT – procedimentos – como medir).

Por outro lado, as unidades de medidas usadas como exemplo pelos professores nesse primeiro momento mostram uma imprecisão entre o estabelecimento de unidades e o uso de instrumentos, pois as unidades de medidas usadas inicialmente – pés e barbante [5-6] – também podem ser usadas como instrumentos (ao usar um barbante que cubra todo o comprimento do ponto de referência da professora até a porta, ou os pés, para contar os passos de distância). Neste momento, mostra-se necessário também um estudo sobre procedimentos de medida, visto que tais conhecimentos emergiram das falas dos professores enquanto pensavam no significado da Medida.

A importância do estabelecimento da unidade é ressaltada no trecho no qual o professor Rogério responde à pergunta “como medir” (Quadro 3):

Quadro 3 – Trecho transcrito da resposta do professor Rogério à pergunta “*Como medir?*”

- [8] Rogério: *Eu acho que isso é ideal, porque se você complexificar, deixar mais complexo, que*
[9] *nem, por exemplo, daqui até o Parque Taquaral, aí já não dá mais para usar o barbante.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018)

Neste momento o professor está ressaltando um questionamento anterior: seria necessário estabelecer uma unidade de medida, dizendo que é algo ideal [8] e reforçando a necessidade desta condição? (KPM – condições necessárias e suficientes para gerar definições), e justifica este fato pensando em medidas de maior escala, em que não se pode realizar a medição com um instrumento manual, ou ainda considerando a conveniência da unidade de medida. Além disso, o professor revela um conhecimento sobre limitações no uso de instrumentos (KSM – conexões auxiliares), pois percebe essa limitação, (CLEMENTS, 1999) que não possibilita medidas manuais em grandes distâncias. Foi possível observar, em outros momentos, associações entre “*o que significa medir*” e “*com o que se mede*”. Os professores tendem a dar significado à primeira pergunta, tomando como base os instrumentos utilizados para medir (Quadro 4).

Quadro 4 – Trecho transcrito da resposta do professor Rogério à pergunta “*O que significa medir?*”

- [10] Rogério: *Porque para responder à (a) eu pensei na (e), “com o que você vai medir”, você*
[11] *sempre compara alguma coisa com outra, você mede com uma régua ou com uma trena, a*
[12] *unidade de medida já é uma comparação. Com base em algo.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018)

Ao dizer que precisa pensar em “com o que se mede”, para pensar no significado de medir [10], o professor Rogério reforça a necessidade de pensar num instrumento para dar significado à Medida; porém, em sua fala ele demonstra imprecisão, ao afirmar que a unidade de medida já é uma comparação e sugerir o uso dos instrumentos citados (régua e trena) como unidades de medida, gerando uma ambiguidade: associa os instrumentos com unidade de medida, pois se refere ao uso de toda a régua ou toda a trena como unidade - um objeto pode medir uma régua, duas régua (KoT – procedimentos), porém, ao associar dessa forma os instrumentos, a referência à unidade de medida [12] pode ser aquela que se encontra nas régua – o centímetro, metro e milímetro (KSM – conexões auxiliares).

No que tange ao significado de medida, na visão do professor Rogério [10-12], existe a necessidade de estabelecer uma unidade e também de usar um instrumento como uma condição necessária para a realização de uma medida (KoT – definições). Ele coloca, assim, uma condição adicional às já citadas anteriormente (CARAÇA, 1963). Vemos, com isso, que o conceito de medida para os professores envolve a noção de *comparar* e de *estabelecer uma unidade de medida*, e também para Rogério há a necessidade de utilizar *instrumentos para concretizá-la* (Quadros 3 e 4), porém citando exemplos de instrumentos que podem ser também unidades de medida.

A importância dos instrumentos de medidas pode ser percebida pelo comentário da professora Alice (Quadro 5).

Quadro 5 – Trecho transcrito da resposta da professora à pergunta “O que significa medir”

- [13] Alice: *Eu posso medir sem utilizar um sistema, pode falar maior e menor, longe e perto, sem um sistema ali registrando exatamente, mas a noção é dada.*

[14] *sistema ali registrando exatamente, mas a noção é dada.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018)

Alice indica a possibilidade de realizar uma medida sem usar um instrumento [13] ou sem o instrumento padrão [14] (KSM – conexões auxiliares). A *unidade de medida* encontra-se associada à possibilidade de medir sem utilizar uma unidade, ao comparar diretamente dois objetos, utilizando a comparação de seus atributos (KoT – procedimentos).

Tomando o significado da palavra “sistema” como instrumento de medida, os professores consideram que, sem utilizar um instrumento de medida, o processo de medição está limitado a comparar os atributos dos objetos, como em “perto e longe” [13] para objetos que têm mais distância em relação a quem o observa (CARAÇA, 1963; CLEMENTS; STEPHAN, 2004), e esta pode ser uma razão para sentirem necessidade de utilizar um instrumento para realizar uma medida (como citado também no Quadro 3 e 4). Desse modo,

a necessidade dos professores de pensar num instrumento para realizar a medida talvez seja por acreditarem que os procedimentos de medida que não usam instrumentos estão limitados à comparação entre maior e menor.

Para entender se há, de fato, essa limitação nos procedimentos e para observar o conhecimento dos professores sobre isso, de acordo com os princípios envolvidos na medida (CLEMENTS; STEPHAN, 2004; PIAGET; INHELDER, 1973), mostra-se interessante observar os trechos em que eles descrevem procedimentos de medidas.

Uma primeira descrição de procedimento aparece ainda em resposta à questão “*o que significa medir?*” (Quadro 6):

Quadro 6 – Trecho transcrito da resposta do professor Rogério à pergunta “*O que significa medir?*”.

- [15] Rogério: *Dá para comparar também; se o lugar é muito grande como essa sala, você pode*
[16] *pensar em fazer uma caixa menorzinha e medir o volume e ver quantas vezes cabe dentro dela,*
[17] *é uma comparação.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018)

Rogério dá um exemplo de medida sobre a grandeza volume [15-16], descrevendo um procedimento de medida: com o que se mede [16-17] e como se mede [16] (KoT – procedimentos – como medir (quantas caixas menorzinhas cabem dentro da caixa maior) e características do resultado (quantidade de caixas menor é o resultado referente ao volume da sala), adotando princípios para volumes, análogos aos princípios de medida linear apresentados por Clements e Stephan (2004) e Piaget e Inhelder (1983); iteração da unidade, ao usar a “caixa menorzinha” como unidade e iterá-la sobre a sala de aula (“uma caixa maior”); e acumulação da distância, ao entender que o volume total da sala é dado pela quantidade de vezes que a unidade foi iterada. Dessa forma, o professor demonstra um conhecimento sobre processo de medida direto de volume (KoT - definições), um atributo que geralmente é medido indiretamente a partir das medidas dos comprimentos dos lados da sala (GODINO; BATANERO; ROA, 2002).

O professor indica que é possível realizar os passos descritos para medir o volume ou a capacidade da sala de aula, pois não é necessariamente conveniente realizar a medição indireta, a partir das medidas lineares da sala – comprimento, largura e altura (GODINO; BATANERO; ROA, 2002). Isto mostra uma necessidade de ampliar a discussão sobre medidas para a medida indireta de volume.

Trazemos também a transcrição do diálogo entre Rodrigo e Regina, no início das discussões sobre procedimento (Quadro 7):

Quadro 7 – Trecho transcrito das respostas dos professores à questão “*Como medir?*”

- [18] Rodrigo: *Essa (b) é difícil responder. Como vou medir a distância daqui até o Sol? (...)*
[19] Regina: *Não, para medir daqui até a porta já é complicado. Eu pego o barbante, eu conto os*
[20] *pezinhos deles, coisas que tenham...*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018)

Neste trecho observa-se um conhecimento a respeito do “como medir” como o atributo comprimento – como a utilização do barbante ou os pés dos alunos [19-20], com foco em um instrumento de medida (KSM – conexões auxiliares).

Regina faz referência à quantidade numérica suficiente de pés dos alunos para cobrir, por exemplo, o espaço de seu ponto de referência até a porta [19-20], explorando o princípio da relação de medida com o (seu) valor numérico (CLEMENTS; STEPHAN, 2004), e revela, assim, elementos de conhecimento procedimentais (KoT – procedimentos – como medir (realizando as iterações dos pés) e características do resultado (quantidade de pés é a medida procurada). Porém, a atribuição de uma quantidade numérica para essa medida surgiu como um processo descritivo de um procedimento, sem considerá-lo também uma condição necessária para definir medida, e por isso foi um aspecto tocante somente a procedimentos, e não à definição de medida.

A professora Regina ainda demonstra ter o conhecimento sobre instrumentos não *standard* [19-20] para o estudo de medidas de comprimento com seus alunos (CLEMENTS, 1999), com o uso de barbante e da contagem de passos dos alunos (KSM – conexões auxiliares), e mostra que os professores não conseguiram atribuir sentido a procedimentos de medidas com dimensões muito maiores que a escala humana – distância da Terra até o Sol [13] –, o que impossibilita a comparação direta (GODINO; BATANERO; ROA, 2002).

Ela também atenta à relevância da unidade de medida para o procedimento de medição, situação que é igualmente destacada em outros momentos da discussão dos professores (Quadro 8).

Quadro 8 – Trecho transcrito da resposta da professora Regina à pergunta “*O que se mede?*”

- [21] Regina: *E essa semana eu fiquei pensando, eu ia fazer algum experimento para trazer alguma*
[22] *coisa (...) ia levar uns recipientes com a mesma quantidade de um líquido, ia pôr vários*
[23] *recipientes com forma diferente com a mesma quantidade de líquido para ver qual seria a*
[24] *resposta, porque de primeiro momento eles iam falar que onde era mais comprido ia ter mais,*
[25] *essas coisas de criança. E eu queria ver até que ponto eles iam perceber, porque criança tem*
[26] *aquela coisa de conservação, que até 5, 6 anos ele não tem, então que eles iam perceber que*
[27] *tem a mesma quantidade, é medida também, né? Então medida é bem amplo, não é só maior,*
[28] *menor, distância.*

Fonte: Elaborado pelos autores (2018)

Esse comentário de Regina ocorreu quando socializava uma proposta de trabalho com seus alunos, com o intuito de observar se eles perceberiam que uma quantidade líquida se mantém, mesmo quando se troca o recipiente em que ela está colocada [22-24]. Regina referiu-se a essa ideia como conservação (CLEMENTS; STEPHAN, 2004; PIAGET; INHELDER, 1973).

Ao perceber que o transvasamento de líquido para diferentes recipientes pode envolver a medida de capacidade, a professora demonstra conhecer que tal compreensão se faz necessária para pensar no procedimento de medida (KSM – conexões auxiliares) e proporciona uma exploração deste princípio. Relacionado a este entendimento, ela revela elementos de conhecimento referentes ao princípio da conservação [22-28] e ao processo de como medir líquidos nos diferentes recipientes [22-24] (KoT – procedimentos – como medir). Dessa forma, a professora conclui que o processo de medida é mais amplo do que apenas caracterizar em maior ou menor [27-28], ressaltando a possibilidade de medir líquidos – capacidade – e de usar um processo mais sofisticado para medir (KoT – procedimentos – como medir).

Portanto, podemos ver os princípios de iteração da unidade, conservação, acumulação da distância e relação com valor numérico, deixando de ser citados apenas a transitividade e a partição do objeto. Para descrever os procedimentos em que estes princípios foram tratados, os professores não usaram instrumentos de medida, mostrando que este artifício não é uma condição necessária para a realização de uma medida, mas podem facilitar em outros aspectos como atribuição de um valor numérico à medida (CLEMENTS, 1999).

Em uma fala da professora Regina podemos notar mais claramente o seu conhecimento sobre instrumentos de medida, ao descrever um processo que fez com os seus alunos (Quadro 9):

Quadro 9 – Trecho transcrito da proposta da professora Regina “como medir”

- [29] Regina: Igual ano passado, exemplo, minha turma era a da girafa, ela tinha 2 metros e não sei
[30] quanto, 2 e 40, não lembro exatamente agora, e eles têm bem menos, eu falava “que tamanho que
[31] tem...” e como que eles vão imaginar quanto é 2 e 40 na cabeça deles? É abstrato. Então o que a
[32] gente fez, a gente pegou o barbante, mediu uma criança, depois eu peguei uma fita métrica e fui
[33] medindo 2 e pouco, daí a gente foi até o parque, pus a fita enorme. Então tipo assim, a girafa teria
[34] aquele tamanho, e pus a fita pequenininha, o barbante, que a criança teria aquele tamanho, aí que
[35] eles entenderam.

Fonte: Elaborado pelos autores (2018)

A professora demonstrou conhecimento sobre instrumento *standard* e não *standard* de medida de comprimento (KSM – conexões auxiliares), ao usar barbante [32] e fita métrica

[33], fazendo diferentes usos para os dois instrumentos: do barbante extraiu um pedaço com tamanho equivalente à altura dos seus alunos e com a fita métrica determinou qual seria o comprimento exato dos seus alunos, associando com um valor numérico. Tais afirmações vão de acordo com Clements (1999), ao fazer o uso dos dois tipos de instrumentos para ampliar o senso de medida dos estudantes. Ao final, ela também reforçou a noção de medir como comparar, ao observar a diferença entre os comprimentos dos barbantes na altura da girafa e na das crianças (KoT – definições).

Portanto, a necessidade de instrumentos para relacionar uma medida se fez presente nas falas dos professores, e também os recursos dos instrumentos para facilitar a realização de uma medida – em geral, a atribuição de um valor numérico (KSM – conexões auxiliares). Portanto, o uso de instrumento foi um fator em que os professores precisaram pensar para atribuir significado à medida, mas não é uma condição necessária para realizá-la, o que foi exemplificado pelos procedimentos de medida nos Quadros 7, 8 e 9. Além disso, os professores demonstraram ter conhecimento tanto de instrumentos *standards* quanto de não *standards* (CLEMENTS, 1999).

Em relação a procedimentos de medidas, foi mencionado pelos professores como condição necessária apenas o estabelecimento de uma unidade de medida (BRAGG; OUTHRED, 2004), e as noções de procedimentos se entrelaçaram com as descrições de procedimentos de medida. Assim, se fez necessário abordar nas tarefas os princípios envolvidos no processo de medida, para que os professores tomem consciência deste processo (CLEMENTS; STEPHAN, 2004; PIAGET; INHELDER, 1983).

5. Considerações Finais

A fim de dar significado à Medida, os professores sentiram a necessidade de estabelecer uma comparação, de estabelecer uma unidade de medida e de usar instrumentos. Ao final, somente as duas primeiras condições se mostraram necessárias (CARAÇA, 1963). O uso de instrumentos também foi por várias vezes relacionado aos procedimentos de medidas, mostrando uma necessidade de trabalhar melhor a diferença entre os conhecimentos da medida em si e do uso de instrumentos. A condição de atribuição de valor numérico à medida não foi mencionada pelos professores, e precisa também ser mais bem trabalhada em futuras tarefas.

Por outro lado, identificar, dentro do modelo MTSK, onde estão os conhecimentos sobre procedimentos (KoT – procedimentos) e de instrumentos (KSM – conexões auxiliares) nos ajuda a distinguir essas duas questões e a entender que o conhecimento sobre instrumentos de medida não é intrínseco à realização de uma medida, mas é uma conexão que pode auxiliar a obter resultados das medidas. Ainda neste mesmo raciocínio, é interessante trabalhar os princípios envolvidos nos procedimentos de medidas (CLEMENT; STEPHAN, 2004) separadamente da utilização de instrumentos, para os professores perceberem essa diferenciação entre instrumentos e procedimentos de medidas.

As medidas muito grandes, que excedem a possibilidade de utilização de instrumentos manuais também foi levantada pelo professor Rogério (Quadro 5), e precisa ser mais bem discutida, a fim de atribuir sentido a este tipo de medição, em que não se pode fazer medir direta e manualmente (GODINO; BATANERO; ROA, 2002).

Os resultados desta investigação apontaram como perspectivas de trabalho futuro o estudo de distinção entre instrumentos de medida e procedimentos de medida; a discussão dos princípios envolvidos nos procedimentos de medidas, situações extremas de medidas de grandezas muito grandes (distâncias planetárias por exemplo); o estudo de outras grandezas, como área, volume e capacidade; e a elaboração de tarefas sobre o tema medidas para a formação de professores e, conjuntamente, para alunos.

6. Agradecimentos

Este trabalho faz parte do projeto "PROJETO 1" e também está atrelado às atividades do projeto "PROJETO 2", n.º NÚMERO (PAIS), aos quais agradecemos. Os agradecimentos também se estendem aos colegas de trabalho do grupo GRUPO.

7. Referências

ALFONSIN, B. M. Da escala local à escala global: tendências hegemônicas de privatização do espaço público e resistências contra- hegemônicas em Porto Alegre. **Revista da Faculdade de Direito UniRitter**, Porto Alegre, n. 11, p. 79-100, 2010.

BIVAR, A. et al. **Programa e metas curriculares matemática - Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, 2013. 118 p.

BRAGG, P.; OUTHRED, L. A Measure of Rulers – The importance of units in a measure. In: INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 2004, Bergen. **Proceedings...** Bergen, 2004. p. 159-166.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 4. ed. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa/Portugal: Bertrand, 1963.

CARNOY, M.; ARENDS, F. Explaining mathematics achievement gains in Botswana and South Africa. **Prospects** – Springer Netherlands, v. 42, n. 4, p. 453-468, 2012.

CARRILLO, J. et al. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, [S.l.], p. 19, 2018.

CLEMENTS, D. Teaching length measurement: Research challenges. **School Science and Mathematics**. v. 99, n. 1, p. 5-11, 1999

CLEMENTS, D. H.; STEPHAN, M. Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In: CLEMENTS, D.; SARAMA, J.; DIBIASE, A.-M. (Org.). **Engaging young children in Mathematics: Standards for early childhood mathematics education**. New Jersey: LEA: [s.n.], 2004. p. 299-317.

CZELUSNIAK, A. Quando o “aluno-problema” é culpa do professor. **Jornal Gazeta o povo – Educação**, 2016.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; ROA, R. Magnitudes y Medida. **Medida de magnitudes y su didáctica para maestros**. [S.l.]: Proyecto de investigación y desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, 2002. p. 611-654.

HILL, H. C.; ROWAN, B.; BALL, D. Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. **American Education Research Journal**, v. 42, n. 2, p. 371-406, 2005.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS (NCTM). Principles and standards for school mathematics -. [S.l.]: Reston, VA, 2000.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **O desenvolvimento das quantidades físicas na criança: conservação e atomismo**. Rio de Janeiro, RJ: Zahar, 1983.

ROCKOFF, J. E. et al. Can you recognize an effective teacher when you recruit one? **Education Finance and Policy**, v. 6, n. 1, p. 43-74, 2008.

ROSSI-DORIA, M.; PROFUMO, F. (Org.). **Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione**. Itália: [s.n.], 2012.

SÁNCHEZ, A. C.; ALBALADEJO, I. M. R.; MEGÍAS, C. A. Sentido de la medida y magnitud superficie: un experimento de enseñanza con alumnado de primaria. **Educación Matemática en la Infancia**, v. 6, n. 2, p. 28-55, 2017.

SEGOVIA, I.; CASTRO, E.; FLORES, P. El área del rectángulo. **Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas**, v. 10, p. 63-77, 1996.