COINSPIRAÇÃO - Revista de Professores que ensinam Matemática – SBEM/Mato Groso
V. 1, Nº. 2, Julho/Dezembro de 2018. http://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/

PROPOSTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM GEOGEBRA E UMA PROPRIEDADE DOS QUADRILÁTEROS

PROPOSAL OF MATHEMATICAL RESEARCH WITH GEOGEBRA AND A PROPERTY OF QUADRILATERALS

Uender Barbosa Souza[1]

Vinícius A. L. Gonçalves[2]

Ana Carolina S. Adolfo[3]

Jéssica V. da Silva[4]

Resumo
Com o advento das novas tecnologias, as metodologias tradicionais utilizadas em sala de aula acabaram ficando obsoletas, evidenciando a necessidade de os professores reverem seus métodos de ensino. Neste artigo, é apresentada uma proposta para análise de um problema de geometria, disponível no banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) de 2016. A metodologia usada foi a Investigação Matemática com o GeoGebra, um *software* livre e de matemática dinâmica, que permite ao usuário trabalhar com elementos geométricos e algébricos. Desenvolvida em quatro etapas, a investigação se baseia em visualizar através de experimentação com o *software* diversos casos do mesmo problema, alterando valores e elementos, buscando conjecturar e deduzir propriedades. Formalizar as conjecturas levantadas através de cálculos matemáticos e, por último, generalizar, onde o aluno consegue encontrar um padrão universal aplicável a todas as situações delimitadas pelo problema estudado. O uso do *software* como metodologia de ensino tem grande potencial, pois facilita a visualização e entendimento de problemas, colaborando para o melhor desenvolvimento educacional do aluno.

Palavras-chave: Investigação Matemática. GeoGebra. Geometria. Ângulos. Polígonos.

Abstract
With the innovation of new technologies, the traditional methodologies used in the classroom became obsolete, evidencing the need for teachers to review their teaching methods. In this article, a proposal is presented for the analysis of a geometry problem, available at the OBMEP (Brazilian Public Mathematics Olympiad) bench of 2016. The methodology used was Mathematical Research with GeoGebra, a free dynamic mathematics software, which allows the user to work with geometric and algebraic elements. Developed in four stages, the research is based on visualizing through of experimentation with the software several cases of the same problem, changing values and elements, seeking to conjecture and deduce properties. Formalize the conjectures raised through mathematical calculations and, finally, generalize, where the student can find a universal standard applicable to all situations delimited by the problem studied. The use of software as teaching methodology has great potential, because it facilitates the visualization and understanding of problems, collaborating for the best educational development of the student.

Keywords: Matematical Investigation. GeoGebra. Geometry. Angles. Polygons.

[1] uenderbs@gmail.com
[2] viniciuslouredo1806@gmail.com
[3] carol.adolfo@hotmail.com
[4] jessica.vieira2607@hotmail.com

1. Introdução

Com o advento das novas tecnologias, as metodologias tradicionais utilizadas em sala de aula acabaram ficando obsoletas, evidenciando a necessidade de os professores reverem seus métodos de ensino. Fez-se necessário tornar o aprendizado mais dinâmico pois, as novas gerações são cada vez mais conectadas as novas tecnologias, como computadores e celulares, tornando o ensino tradicional com lousa insuficiente para motivá-los a buscar conhecimento. Nesse sentido, com o auxílio da tecnologia, acreditamos ser possível oferecer aulas mais dinâmicas, que permitam ao aluno desenvolver suas habilidades, seu pensamento crítico a luz de um novo problema e não apenas memorizar aquilo que está sendo ensinado.

As tecnologias têm um papel fundamental para a promoção de ações que contribuam para o desenvolvimento de uma escola centrada na pedagogia do problema, que trabalha com questões reais e que a utiliza como um elemento no processo pedagógico. Segundo Valente (2002, p. 3): "A construção do conhecimento advém do fato de o aluno ter que buscar novos conteúdos e estratégias para incrementar o nível de conhecimento que já dispõe sobre o assunto que está sendo tratado via computador".

O professor deve planejar de maneira clara e consciente a utilização das tecnologias como um suporte, fazendo a associação das mesmas com o conteúdo trabalhado, sendo sua aplicação com fins pedagógicos.

Se tratando do ensino de matemática, é notável como os *softwares* vêm ganhando grande espaço por possibilitarem maior interação dos alunos com o conteúdo, facilitando a investigação de problemas diversos de forma dinâmica. Claro que, para o bom desenvolvimento de aulas usando *softwares*, os professores devem estar familiarizados com os mesmos, e, além do conhecimento de como usá-los, ter uma metodologia para seu uso adequado, dando sentido à relação entre o conteúdo trabalhado e o *software*.

No Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação e Tecnologias de Goiás são apresentados e trabalhados diversos *softwares* matemáticos bem como metodologias para o uso dos mesmos através das Práticas como Componentes Curriculares (PCC). Como citado por Assunção et al. (2017), a resolução CNE/CP2 de 19/02/2002 em seu Art. 1º inciso I determinou a carga horária da PCC, que se diferencia do Estágio Curricular e se estabelece como objeto de reflexão-ação-reflexão permanente, possibilitando uma formação ampla e qualificada de professores.

Desse modo, apresentamos uma proposta didática para uma investigação matemática utilizando o GeoGebra, um *software* livre e de matemática dinâmica, que permite ao usuário trabalhar com elementos geométricos e algébricos. A proposta surgiu a partir das ideias apresentadas pelo professor Uender B. Souza em suas aulas de PCC no IFG Câmpus Goiânia.

Em suas aulas, o professor apresenta e analisa as possibilidades e potencial que o GeoGebra pode oferecer e reforça que os *softwares* não devem ser utilizados sem um motivo especifico, um método que dê base e sustente sua importância para o conteúdo ao qual será trabalhado. Dentre algumas metodologias apresentadas em suas aulas, o professor destaca a proposta de Vaz (2012), que inspirou a proposta deste trabalho.

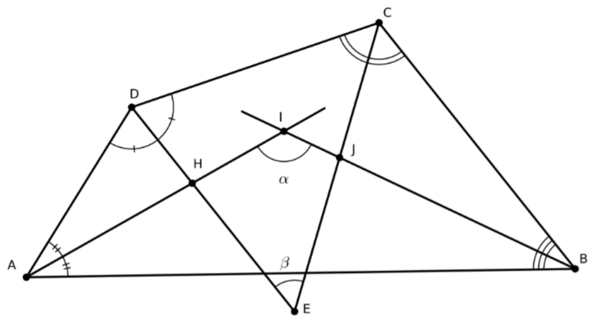
De acordo com Vaz (2012) o GeoGebra “se enquadra na categoria da geometria dinâmica, livre, permitindo uma boa interatividade, possibilitando trabalhar teoremas, construção de conceitos, testar hipóteses e fazer releituras importantes de conteúdos matemáticos”. Segundo o autor:

> No GeoGebra podemos contemplar geometria e álgebra dinamicamente, interagindo entre si na mesma tela, possibilitando o usuário relacionar as várias faces de um mesmo objeto matemático. Permite trabalhar conceitos matemáticos do ensino fundamental, médio e superior e realizar construções matemáticas diversificadas e alterá-las após a construção ser finalizada. Esse dinamismo possibilita que o aluno perceba diversas relações entre os objetos matemáticos, faça conjecturas e até mesmo formalize os resultados, de forma visual, no próprio *software*. (VAZ, 2012, p.40).

O objeto de estudo será o problema de número 7 do nível 2, proposto por Barbosa e Feitosa (2016), disponível no banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) de 2016. O problema aborda conteúdos relacionados a quadriláteros e ângulos, segue seu enunciado:

Dado um quadrilátero convexo, se as quatro bissetrizes de seus ângulos formam um novo quadrilátero $HIJE$, *calcule a soma dos ângulos opostos* $\angle HIJ + \angle JEH$.

Figura 1 - Quadrilátero convexo descrito no problema



Fonte: BARBOSA & FEITOSA (2016, p. 27)

A metodologia será, como já citada, a Investigação Matemática com o *GeoGebra*, proposta por Vaz, desenvolvida em quatro etapas. A primeira etapa é *experimentar*, onde teorias e buscas por padrões podem ser testadas pelos alunos. A segunda é *conjecturar*, após investigar, o aluno pode levantar hipóteses e deduzir propriedades. A terceira é *formalizar* as conjecturas levantadas, tal etapa consiste em mostrar através de cálculos matemáticos que as conjecturas são verdadeiras ou não. E por último, a quarta etapa é a da *generalização*, onde o aluno consegue encontrar um padrão universal aplicável a todas as situações delimitadas pelo problema estudado.

2. Construção e investigação no *software* GeoGebra

Para suporte ao *software*, indicamos Hohenwarter (2009) e Souza (2018). O primeiro, apesar de ser o manual de uma versão antiga do *software*, não deixa a desejar, ainda que usado como referência para versões mais recentes. O segundo é fruto de um projeto do Instituto GeoGebra de Goiás, se trata de um guia de comandos do *software*, vale ressaltar que o projeto ainda está em desenvolvimento.

Como citamos anteriormente, o *software* deve ser usado de maneira adequada como suporte no processo educacional, e cabe ao professor elaborar estratégias e aplicar metodologias bem fundamentadas. Neste sentido, mostramos nesta seção como desenvolver as quatro etapas propostas por Vaz na investigação do problema proposto.

Começamos a investigação pela *experimentação*. Seguem os passos para a construção do problema no *GeoGebra*.

1. Usando a ferramenta *Polígono*, crie um quadrilátero $ABCD$;

2. Crie as bissetrizes inserindo os comandos:

$$r: Bissetriz(D, A, B);$$
$$s: Bissetriz(A, B, C);$$
$$t: Bissetriz(C, D, A);$$
$$u: Bissetriz(D, C, B),$$

no *Campo de Entrada* ou usando a ferramenta *Bissetriz* e clicando nos três pontos que formam o ângulo, até construir as quatro retas;

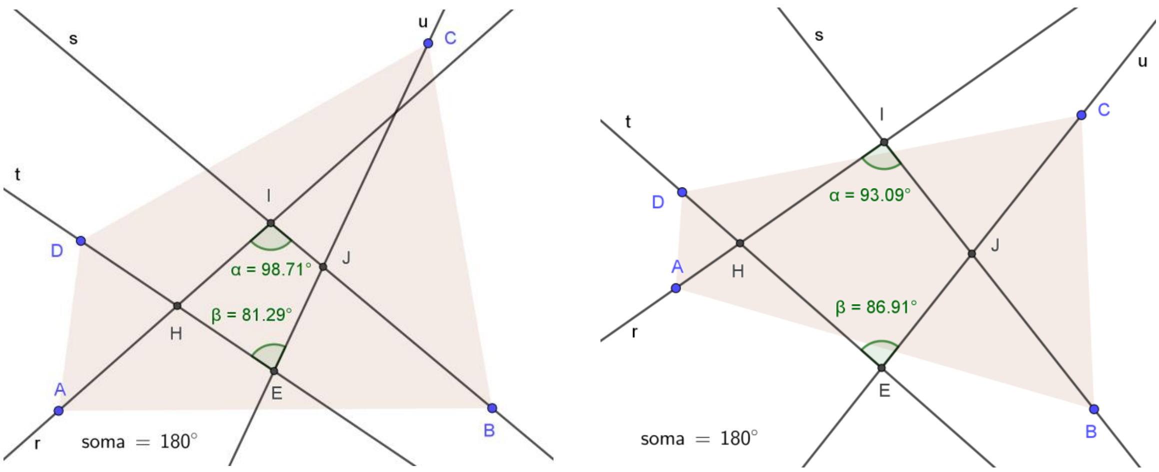
3. Crie as interseções das retas:

$$E = Interseção(t, u);$$
$$H = Interseção(r, t);$$
$$I = Interseção(r, s);$$
$$J = Interseção(s, u).$$

4. Crie os ângulos a e b:

$$\alpha = Ângulo(H, I, J);$$
$$\beta = Ângulo(J, E, H).$$

Figura 2 - Disposições distintas dos vértices e soma dos ângulos



Fonte: Os autores.

5. Determine a soma dos ângulos com:

$$soma = \alpha + \beta.$$

Ao variar as posições dos vértices A, B, C e D, notamos que a soma se mantém constante e igual a $180°$, veja a Figura 2. *Conjecturamos* então que $\alpha + \beta = 180°$.

Nos resta verificar formalmente que o resultado é realmente o que conjecturamos. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$, segue que:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta = \quad & 360° - \angle IJE - \angle IHE \\
& 360° - (180° - \angle DAH - \angle ADH) - (180° - \angle JCB \\
& \qquad - \angle JBC) \\
& \frac{\angle ADC}{2} + \frac{\angle DAB}{2} + \frac{\angle DCB}{2} + \frac{\angle CBA}{2} \\
& \frac{360°}{2} = 180°.
\end{aligned}$$

Finalizamos assim a etapa de *formalização* confirmando nossa conjectura. A última etapa da investigação é a *generalização*, e a faremos analisando o resultado obtido através das 3 etapas já desenvolvidas.

Note que se cada ângulo do quadrilátero $ABCD$ for dividido em 2 e seguindo os passos para a construção do novo quadrilátero $HIJE$ como descrito no enunciado do problema, obtemos a soma $\alpha + \beta = \frac{360°}{2}$. Levantamos a seguinte questão: ao dividir cada ângulo do quadrilátero inicial em n partes (n-seção do ângulo) e seguindo os passos para a construção do novo quadrilátero $HIJE$, a soma dos ângulos será $\alpha + \beta = \frac{360°}{n}$?

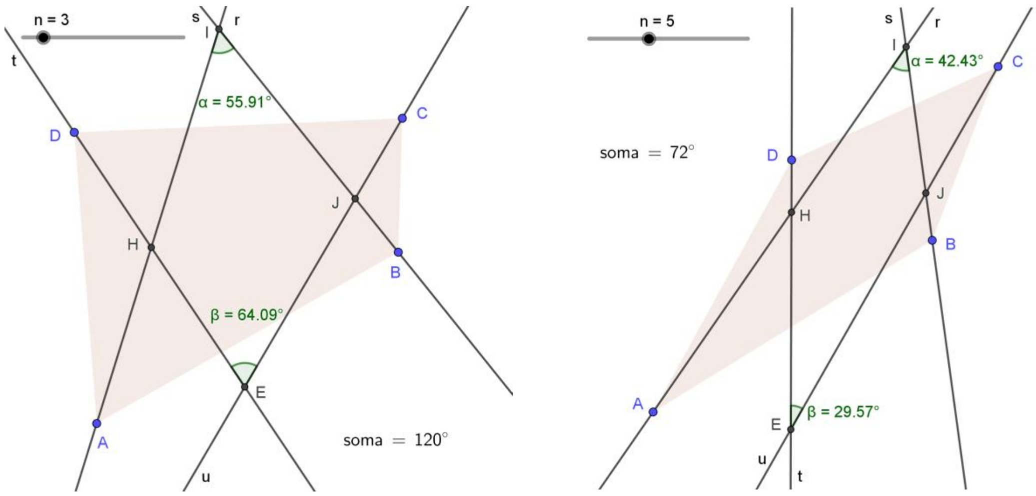
Seguimos com a tentativa de *generalização* do problema. Para a nova construção no *GeoGebra*, basta substituirmos as retas r, s, t e u no passo 2 da etapa de experimentação pelas retas:

$$r: Girar(Reta(A, D),\ (-\hat{A}ngulo(B, A, D))/n,\ A);$$
$$s: Girar(Reta(B, C),\ \hat{A}ngulo(C, B, A)/n,\ B);$$
$$t: Girar(Reta(A, D),\ \hat{A}ngulo(A, D, C)/n,\ D);$$
$$t: Girar(Reta(A, D), \hat{A}ngulo(A, D, C)\ /\ n,\ D),$$

sendo *n* um *controle deslizante* com valor inicial maior ou igual a 2 e incremento 1. Os demais passos são idênticos.

Analisando a construção, alterando os vértices de posição e variando os valores de n, percebemos que $\alpha + \beta$ é $\frac{360}{n}$ como esperado, veja a Figura 3.

Figura 3 - Representação da etapa da generalização do problema no GeoGebra.



Fonte: Os autores.

Devemos *formalizar* o resultado com a demonstração, que é semelhante a que fizemos na etapa de experimentação.

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta = \quad & 360° - \angle IJE - \angle IHE \\
& 360° - (180° - \angle DAH - \angle ADH) - (180° - \angle JCB \\
& \qquad\qquad - \angle JBC) \\
& \frac{\angle ADC}{n} + \frac{\angle DAB}{n} + \frac{\angle DCB}{n} + \frac{\angle CBA}{n} \\
& \frac{360°}{n}.
\end{aligned}
$$

Percebemos que a tentativa de generalização do problema também é composta pelas 3 primeiras etapas, e reforça a eficiência da investigação matemática com o *GeoGebra*.

3. Resultados

A proposta foi desenvolvida com outros alunos da disciplina de PCC e observou-se que algumas situações imprevisíveis podem ocorrer, como a falta de familiarização dos alunos em relação às tecnologias. O professor deve estar preparado para perceber que isto pode acontecer.

Outra dificuldade que pode ser enfrentada ao empregar a metodologia sugerida é o tempo, pois os alunos devem antes conhecer o *software* e possuir conhecimento, mesmo que básico, de como trabalhar com o mesmo. Em nossas experiências de estagio notamos que é difícil conciliar uma atividade deste tipo com o tempo escolar, já que a mesma necessita de uma preparação prévia da turma em que será aplicada.

Apesar das possíveis dificuldades, a aplicação da Investigação possibilitou a transmissão de ideias significativa, pois conseguimos através da experimentação com o *software* que os alunos envolvidos levantassem questionamentos relevantes sobre o problema. Notamos que alguns alunos podem fazer colocações que nem sempre possuem significância para a investigação, ou mesmo, não possuem respostas imediatas. Cabe assim ao professor, nortear através de diálogo e exemplos como as colocações e questionamentos devem ser elaborados.

Na fase de formalização é o momento em que o conhecimento matemático é colocado em prática, e como mostramos em nossa proposta, é a etapa que prepara o aluno para a generalização das ideias levantadas. Notamos que o professor deve guiar o aluno dando autonomia para que o mesmo possa desenvolver a intuição matemática e se preparar para a próxima etapa, a generalização.

Observamos que, a introdução de atividades investigativas na sala de aula é uma poderosa ferramenta e pode inspirar não só os alunos, mas também nossos professores.

4. Considerações Finais

É notória a contribuição das tecnologias para o ensino de matemática, visto que possibilita ao aluno uma melhor compreensão dos problemas propostos, fazendo com que este possa visualizar suas aplicabilidades no cotidiano.

A investigação matemática com o software GeoGebra proporciona aos alunos experiências dinâmicas ao facilitar a visualização de propriedades e relações matemáticas, abrindo um novo horizonte de possibilidades. Além disso, outra vantagem do software é o fato de ser livre e gratuito sendo acessível a todos.

Ao utilizar o software para resolver um exercício da OBMEP, percebeu-se que este facilitou muito o entendimento do que era proposto no exercício, tornando a compreensão do mesmo mais dinâmica, entendível e inteligível.

Percebe-se que a utilização de diferentes metodologias e estratégias comprovaram a motivação e o aumento de interesse por parte dos alunos envolvidos, nos levando a concluir dessa experiência que o desenvolvimento de atividades investigativas de fato, proporciona um ambiente favorável à aprendizagem.

Nesse sentido, acreditamos que o uso do software como metodologia de ensino tem grande potencial, pois facilita a visualização e entendimento de problemas, colaborando para o melhor desenvolvimento educacional do aluno.

Finalizamos citando os trabalhos de Assunção et al. (2017) e Filho, Gonçalves e Souza (2017) por abordarem de forma semelhante à exposta neste a Investigação Matemática com o GeoGebra. Trabalhos que, assim como este, são frutos da disciplina de PCC ministrada pelo professor Uender.

5. Referências

ASSUNÇÃO, Amanda de Brito R. et al. **Investigação da Razão Entre as Áreas de um Polígono Regular eum Polígono Estrelado Inscrito Usando o Software GeoGebra**. In: SIMPÓSIO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO, 3., 2017, Goiânia. 2017. Disponível em: <https://www.geogebra.org/resource/ej4cDPjM/GZdAudRUV3GyEjf4/material-ej4cDPjM.pdf>. Acesso em 14 de maio de 2018.

BARBOSA, Régis; FEITOSA, Samuel. **OBMEP - Banco de Questões 2016**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2016.pdf>. Acesso em 05 dez. 2017.

FILHO, Ricardo V. N., GONÇALVES, Vinícius A. L., SOUZA, Uender B. **Investigação Matemática com GeoGebra no Estudo de Máximos de uma Função**. In: SIMPÓSIO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO, 3., 2017, Goiânia. 2017. Disponível em: <https://www.geogebra.org/resource/MWAbzkZT/qzQfHAYqhS6dpdXY/material-MWAbzkZT.pdf>. Acesso em 14 de maio de 2018.

HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith. **Ajuda GeoGebra, Manual Oficial da Versão 3.2**. Tradução e adaptação para português de Portugal: António Ribeiro. 2009. Diponível em <https://app.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em 14 de maio de 2018.

SOUZA, Uender B. **Guia de Comandos do GeoGebra: Exemplos e desafios**. Projeto do Instituto GeoGebra de Goiás. Goiânia, 2018. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/EeedVvbU>. Acesso em 14 maio de 2018.

VALENTE, J. A. A Espiral da Aprendizagem e as Tecnologias da Informação e Comunicação**:** Repensando Conceitos. In: Maria Cristina R. Azevedo Joly (Org.). **A Tecnologia no Ensino:** Implicações para a Aprendizagem. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002, p. 1-14.

VAZ, D. A. F. **Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação matemática com o GeoGebra**. Revista Educativa. Goiânia, v. 15, n. 1, p. 39-51, jan./jun. 2012.