COINSPIRAÇÃO
Revista dos Professores que Ensinam Matemática

Conexões Históricas e Epistemológicas entre a Oxytome e a Elipse: Implicações para o Ensino de Seções Cônicas

Ivonne C. Sánchez[1]
Universidade Federal do Pará

Luis Andrés Castillo[2]
Universidade Federal do Pará

Iran Abreu Mendes[3]
Universidade Federal do Pará

RESUMO

Neste artigo, destaca-se o desenvolvimento histórico e epistemológico dos métodos para determinar a equação de uma cônica específica, desde Menêcmo com a Oxytome até as contribuições de Apolônio com a Elipse. O texto revela um movimento sequencial histórico, utilizando a História da Matemática para enriquecer o ensino da cônica que conhecemos como Elipse, explorando métodos diversos para determinar sua equação, culminando na expressão reduzida. Isso é feito a partir de uma pesquisa bibliográfica em fontes primárias, secundárias e terciárias. Embora não se concentre nas potencialidades das tecnologias digitais, destaca-se o papel do GeoGebra na realização precisa de figuras e na compreensão de correlações geométricas e algébricas durante a investigação histórica. Consideramos que este tipo de investigação histórica é de importância conceitual para os professores e de importância didática para o desenvolvimento, apropriação e representação histórica não apenas dessa cônica, mas também de outras curvas, no âmbito científico e disciplinar da matemática e no seu ensino.
Palavras-chave: Elipse; Equação; História da Matemática; Ensino.

Historical Connections between the Oxytome and the Ellipse: Implications for Teaching Conic Sections Ellipse

ABSTRACT

In this article, we highlight the historical and epistemological development of methods for determining the equation of a specific conic section, from Menêcmo with the Oxytome to the contributions of Apollonius with the Ellipse. The text reveals a sequential historical movement, using the History of Mathematics to enrich the teaching of the conic section known as the Ellipse, exploring various methods to determine its equation, culminating in the reduced expression. This is done through bibliographical research in primary, secondary, and tertiary sources.

[1] Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110.ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2485-1059. Lattes: http://lattes.cnpq.br/9964399535972053. E-mail: ivonne.s.1812@gmail.com.

[2] Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110.ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5174-9148. Lattes: http://lattes.cnpq.br/4358821746569093. E-mail: luiscastleb@gmail.com.

[3] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor Titular do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa., 01, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110.ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7910-1602. Lattes: http://lattes.cnpq.br/4490674057492872. E-mail: iamendes1@gmail.com

Although it does not focus on the potential of digital technologies, the role of GeoGebra in creating precise figures and understanding geometric and algebraic correlations during historical research is emphasized. We believe that this type of historical investigation is conceptually important for teachers and didactically significant for the development, appropriation, and historical representation not only of this conic section, but also of other curves, within the scientific and disciplinary scope of mathematics and its teaching.
Keywords: Ellipse; Equation; History of Mathematics; Teaching.

Conexiones Históricas entre la Oxytome y la Elipse: Implicaciones para la Enseñanza de Secciones Cónicas

RESUMEN

En este artículo, resaltamos el desarrollo histórico y epistemológico de los métodos para determinar la ecuación de una sección cónica específica, desde Menêcmo con la Oxytome hasta las contribuciones de Apolonio con la Elipse. El texto revela un movimiento histórico secuencial, utilizando la Historia de las Matemáticas para enriquecer la enseñanza de la sección cónica conocida como la Elipse, explorando varios métodos para determinar su ecuación, culminando en la expresión reducida. Esto se realiza a través de la investigación bibliográfica en fuentes primarias, secundarias y terciarias. Aunque no se centra en el potencial de las tecnologías digitales, se destaca el papel de GeoGebra en la creación de figuras precisas y la comprensión de correlaciones geométricas y algebraicas durante la investigación histórica. Creemos que este tipo de investigación histórica es conceptualmente importante para los profesores y significativa didácticamente para el desarrollo, apropiación y representación histórica no solo de esta sección cónica, sino también de otras curvas, dentro del ámbito científico y disciplinario de las matemáticas y su enseñanza.
Palabras clave: Elipse; Ecuación; Historia de las Matemáticas; Enseñanza.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A elipse é um conceito matemático para ser abordado no ensino médio, mas é comumente abordado no ensino superior. Essa abordagem fundamenta-se em curvas que são geradas a partir de cortes transversais num cone, explorando diversas representações, tais como gráficos, expressões algébricas etc. Essa curva é minuciosamente examinada com ênfase na disciplina de geometria analítica, especialmente através da definição de lugar geométrico, na qual a elipse integra o estudo das cônicas (Siqueira, 2016).

Bordallo (2011) destacou que, nos livros didáticos do terceiro ano do ensino médio, as cônicas são comumente apresentadas por meio do corte entre um plano e um cone circular reto de duas folhas. Entretanto, Borges (2023) sinaliza que não se realiza a demonstração da equação reduzida de nenhuma cônica; a equação é apenas apresentada como o desdobramento da propriedade focal. Nesse cenário dos livros didáticos, Monteiro (2014) destaca o predomínio do enfoque algébrico no estudo das cônicas em detrimento de um ensino-aprendizagem de aspectos mais intuitivos, como proposto na geometria. Esta, por sua vez, é utilizada, em sua grande maioria, apenas como suporte introdutório para cada figura cônica abordada.

Nesse contexto, a elipse emerge como uma curva resultante dessa interseção quando o plano é posicionado paralelamente à reta geratriz do cone reto de duas folhas. Nesse sentido, mostra-se que o ensino das cônicas, em particular da elipse, privilegia um ensino que apenas

vincula os conhecimentos geométricos para ilustrar o corte de um cone por um plano, sem justificar sua relação com a definição lugar geométrico e outras propriedades e relações matemáticas. Assim sendo, deve-se procurar abordagens que façam refletir aos estudantes sobre estratégias e práticas criadas ao longo da história humana para explicar e compreender conteúdos matemáticos escolares, o que promoveria uma possibilidade de ações pedagógicas para promover ensino e aprendizagem diferenciados, criativos, investigativos etc. Uma abordagem que propicie isto, e por meio do uso da História para/no Ensino da Matemática (Mendes, 2022).

Neste trabalho usaremos a História da Matemática para apoiar o Ensino da Elipse com base nas ideias e noções de Menêcmo, Apolônio e a abordagem como lugar geométrico proposta por Pierre de Fermat. De maneira tal a apresentar uma abordagem além do corte entre um plano e um cone reto, descrevendo os diversos métodos para determinar a equação da Elipse até chegar à expressão reduzida dela. Portanto, na nossa abordagem são estabelecidas correlações geométricas e algébricas advindas do desenvolvimento histórico e epistemológico da Elipse na organização de um movimento sequencial histórico.

Assim sendo, o objetivo deste trabalho é caracterizar no desenvolvimento histórico e epistemológico os métodos de obtenção da equação da Elipse para subsidiar a organização de um movimento sequencial histórico relativos à trajetória matemática da Oxytome à Elipse para o ensino desta cônica. Nas seções seguintes descrevemos as bases teóricas a respeito da história no ensino da matemática, os processos metodológicos da investigação, a trajetória matemática da Oxytome à Elipse e, finalmente, as considerações finais.

HISTÓRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

A História da Matemática é um recurso pedagógico que desperta o interesse de muitos estudiosos e pesquisadores da Educação Matemática, estabelecendo-se, para alguns professores, como uma metodologia capaz de auxiliar o processo de ensino de Matemática em sala de aula. Conforme Mendes (2022, p. 19), ela se refere ao uso da História da Matemática no ensino, definindo-o como "explorações educativas da história das ideias produzidas no passado e como podem ser refletidas na Matemática que ensinamos". De fato, a Matemática que conhecemos hoje reflete os esforços humanos para resolver problemas cotidianos e compreender o mundo. Desde a antiguidade, o homem fez inúmeras descobertas e invenções para solucionar os problemas que surgiam em sua vida diária - desde, talvez, a primeira

descoberta de como produzir e usar o fogo, para cozinhar e aquecer-se, até a criação de automóveis e aviões como meios de transporte para chegar a lugares mais distantes.

Nesse sentido, os professores que utilizam a História da Matemática em suas salas de aula deveriam refletir com seus estudantes sobre as estratégias e práticas criadas ao longo da história humana que ainda podem ser implementadas hoje para explicar e compreender conteúdos matemáticos imersos nessas práticas. Isso promoveria a possibilidade de um novo método educativo que busca ensino e aprendizagem diferenciados, criativos e investigativos, entre outros. Mendes (2022), em suas reflexões sobre o tema, reconhece que o estudo de textos do passado é importante para o ensino de Matemática, visto que o professor guia seus estudantes na reconstrução das ideias atualmente presentes na Matemática, constituídas nos livros didáticos a partir da riqueza do tratamento dos documentos originais.

Uma alternativa teórico-prática que possibilita o uso da história para a criação de atividades didáticas para o ensino de Matemática é a Investigação Histórica. Essa perspectiva baseia-se na história e na investigação como fontes de geração de Matemática escolar. Para Mendes (2006), é possível adaptar essa perspectiva teórico-prática, valorizando e ajustando as informações históricas às necessidades do professor, de modo que seu uso seja mais produtivo na sala de aula. Ainda segundo Mendes, o princípio que articula as atividades de ensino por meio da História da Matemática é a investigação, estabelecendo em sala de aula um ambiente criativo, provocador e problematizador do conhecimento evidenciado na História da Matemática.

Seguindo essa linha de pensamento, Fossa (2006) sugere que a investigação da História da Matemática é sempre uma atividade que envolve a compreensão dos conceitos matemáticos. Nesse sentido, Fossa (2006) propõe o desenvolvimento das habilidades matemáticas que o professor e a escola desejam que o aluno alcance. Ele sugere que a História da Matemática seja incorporada ao ensino de Matemática na forma de atividades de redescoberta ou resolução de problemas, pois é uma fonte rica de problemas interessantes e desafiadores que podem ser usados em sala de aula para proporcionar um melhor entendimento dos conteúdos por parte dos alunos.

O uso de atividades mediadas pela história possibilita ao aluno perceber como os conceitos matemáticos constituídos hoje em dia mudaram ao longo do tempo e como os métodos de resolução dos problemas matemáticos históricos foram aprimorados até chegarem à forma do conhecimento escolar.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICO DA PESQUISA

A metodologia adotada nesta pesquisa baseia-se em uma abordagem qualitativa, utilizando a pesquisa bibliográfica como principal método de coleta de dados. Conforme descrito por Gil (2008), este tipo de pesquisa é fundamentado na análise de material já elaborado, principalmente livros e artigos científicos. Para investigar o desenvolvimento histórico e epistemológico da transição da Oxytome para a Elipse, optamos por uma busca detalhada em fontes primárias, secundárias e terciárias, que abordem informações matemáticas históricas relacionadas aos trabalhos dos matemáticos Menêcmo e Apolônio sobre essa curva.

As fontes primárias incluirão tratados de Menêcmo e Apolônio, bem como quaisquer documentos originais, como manuscritos matemáticos antigos e registros de descobertas matemáticas da época em que esses estudiosos viveram e trabalharam. Assim sendo. Foi procurado compreender suas contribuições específicas para o estudo da curva elíptica e quaisquer insights matemáticos que tenham oferecido sobre sua natureza e propriedades.

As fontes secundárias desempenharão um papel crucial na análise e interpretação das contribuições de Menêcmo e Apolônio para a compreensão da curva elíptica. Essas fontes incluíram livros de história da matemática, artigos de pesquisa acadêmica e dissertações que investigam o contexto histórico e matemático em que esses estudiosos estavam inseridos. Além disso, essas fontes secundárias ofereceram análises críticas das obras de Menêcmo e Apolônio, destacando suas contribuições para o desenvolvimento da geometria e da matemática em geral.

As fontes terciárias foram consultadas para obter uma visão panorâmica do tema, indicando onde encontrar informações específicas sobre os trabalhos de Menêcmo e Apolônio relacionados à curva elíptica. Isso incluíram referências em enciclopédias de matemática, dicionários especializados e bibliografias de obras relevantes. Essas fontes terciárias ajudarão a direcionar nossa pesquisa e a identificar outras fontes importantes para a investigação.

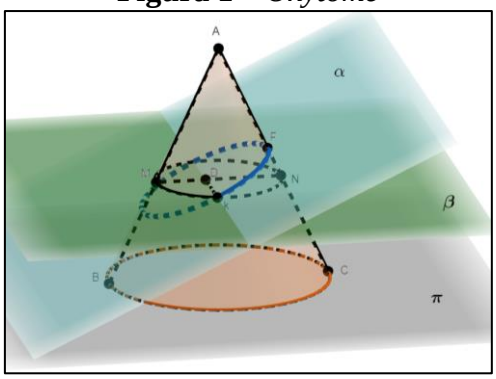
Ao utilizar uma ampla gama de fontes primárias, secundárias e terciárias, esta pesquisa busca fornecer uma compreensão abrangente e aprofundada do desenvolvimento histórico e epistemológico da transição da Oxytome para a Elipse, com foco nas contribuições matemáticas de Menêcmo e Apolônio para o estudo dessa curva.

UMA TRAJETÓRIA HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA DA *OXYTOME* À ELIPSE

Segundo Estrada *et al*. (2000), para determinar o *symptome* da *Oxytome*, Menêcmo utilizou um cone reto que tem o ângulo agudo no vértice, ou seja, que é um cone *oxigonal*.

Então, seja um cone circular reto apoiado sobre o plano π que possui um ângulo agudo no vértice A. O segmento BC é o diâmetro da circunferência base do cone. O ponto F está sobre a geratriz AC e por ele trace um plano α perpendicular a AC. Da interseção do cone com o plano α obtemos a curva p, a qual Menêcmo chamou de *Oxytome* (Figura 1).

Figura 1 – *Oxytome*



Fonte: Elaborada pela autora a partir de Silva Filho (2015)

Agora temos um ponto K sobre a *Oxytome* que seja diferente de F e por esse ponto incidiremos o plano β paralelo ao plano π. A interseção do cone com o plano β é a circunferência g. A interseção de g com as geratrizes AC e AB são os pontos N e M, respectivamente. Temos, então, que o segmento MN é o diâmetro de g.

Nesse caso, o plano de seção α, perpendicular à geratriz AC, não é paralelo à geratriz AB, portanto as retas FD e AB não são paralelas ($FD \nparallel AB$). Como MN e diametro de g, temos que o triângulo KMN inscrito na circunferência g é retângulo e tem o segmento MN como hipotenusa e KD é a altura relativa à hipotenusa. A partir da figura 14, observe que o triângulo ΔMKN é retângulo em K e o triângulo ΔMKN é semelhante aos triângulos ΔMDK e ΔNDK. Os triângulos ΔMDK e ΔNDK são semelhantes, então podemos dizer que:

$$\frac{DM}{DK} = \frac{DK}{DN} \quad (1)$$

Dessa forma, KD é a média proporcional[4] entre DM y DN, portanto, podemos escrever o seguinte:

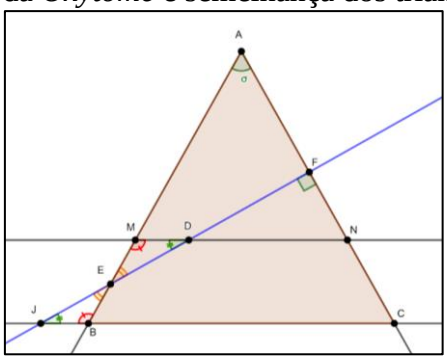
$$KD^2 = DM.DN \quad (1.1)$$

Agora prolongamos os segmentos EF e BC de modo que se encontrem no ponto J (Figura 2). Dessa forma, temos que os triângulos ΔMDE e ΔBEJ são semelhantes ($\Delta MDE \approx \Delta BEJ$) pelo critério ângulo-ângulo-ângulo (os ângulos $\widehat{MED} \cong \widehat{BEJ}$ por serem opostos pelo

[4] Um segmento é a média proporcional de dois outros segmentos, quando ocupa as duas médias ou os dois extremos da mesma proporção.

vértice, também temos que os ângulos $\widehat{EMD} \cong \widehat{EBJ}$ e $\widehat{MDE} \cong \widehat{BJE}$ por serem ângulos alternos internos entre paralelas (Figura 2).

Figura 2 – Vista frontal da *Oxytome* e semelhança dos triângulos ($\Delta MDE \approx \Delta BEJ$)



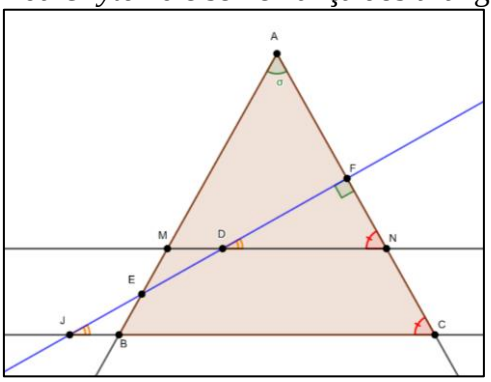
Fonte: Elaboração pelos Autores

Dessa semelhança, temos:

$$\frac{DM}{DE} = \frac{BJ}{EJ} \quad \Rightarrow DM = \frac{DE \cdot BJ}{EJ} \quad (2)$$

Da mesma forma, observa-se que os triângulos ΔFDN e ΔFJC são semelhantes ($\Delta FDN \approx \Delta FJC$) (Figura 3), pelo critério ângulo-ângulo-ângulo (o ângulo $\widehat{FDN}$ e congruente com o ângulo $\widehat{FJC}$ ($\widehat{FDN} \cong \widehat{FJC}$), o ângulo $\widehat{FND}$ é congruente com o ângulo $\widehat{FCJ}$ ($\widehat{FND} \cong \widehat{FCJ}$) por serem ângulos correspondentes entre paralelas e os triângulos compartilham o mesmo ângulo $\widehat{DFN}$).

Figura 3 – Vista frontal da *Oxytome* e semelhança dos triângulos ($\Delta FDN \approx \Delta FJC$)



Fonte: Elaboração pelos Autores

Então tem-se que:

$$\frac{DN}{DF} = \frac{JC}{JF} \quad \Rightarrow DN = \frac{DF \cdot JC}{JF} \quad (2.1)$$

Assim, substituindo as expressões (4) e (2.1) em (2.1) obtemos:

$$KD^2 = DM.DN \quad \Rightarrow \quad KD^2 = \frac{DE \cdot BJ}{EJ} \cdot \frac{DF \cdot JC}{JF} \quad (2.2)$$

Como $DE = EF - DF$ a equação (2.2) pode ser escrita na forma:

$$KD^2 = (EF - DF)\frac{BJ \cdot DF \cdot JC}{EJ \cdot JF} \qquad (2.3)$$

Os segmentos ED, JB, JC, EJ e JF têm sempre a mesma medida independente da escolha do ponto K sobre a curva, enquanto os segmentos KD e FD variam de comprimento em função da posição do ponto K (Silva Filho, 2015). Então, fazendo $KD = y$ e $FD = x$, $EF = 2a$ e $\frac{BJ \cdot JC}{EJ \cdot JF} = k$, temos:

$$y^2 = kx(2a - x) \quad (2.4)$$

Utilizando as expressões de hoje em dia, podemos escrever a equação (2.4) da seguinte maneira, considerando $k = \frac{b^2}{a^2}$, temos:

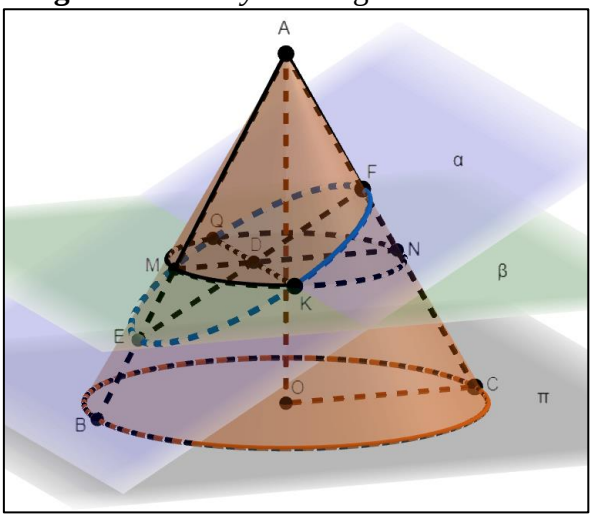
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x(2a - x) \Rightarrow y^2 = \frac{2ab^2x}{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2}, \ (2.5)$$

Agora, considerando $l = \frac{2b^2}{a}$, podemos escrever o seguinte

$$y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad (2.6)$$

Segundo Urbaneja (2017), *l* é uma constante chamada de *latus rectum* e "*a*" e "*b*" são constantes.

Figura 4 – A *Oxytome* segundo Menêcmo



Fonte: Elaboração pelos Autores

Por sua vez, segundo Eecke (1963), Apolônio, em seu tratado *As Cônicas*, definiu a Elipse em seu primeiro livro, na proposição XIII, da seguinte maneira:

> Se um cone é cortado por um plano que passa pelo eixo, e se é cortado por outro plano que, encontrando cada um dos lados do triângulo que passa pelo eixo, não é paralelo nem antiparalelo à base do cone; se, além disso, o plano base do cone e o plano secante se encontram ao longo de uma linha reta perpendicular à base do triângulo que passa pelo eixo, ou perpendicular ao prolongamento desta base, o quadrado de qualquer

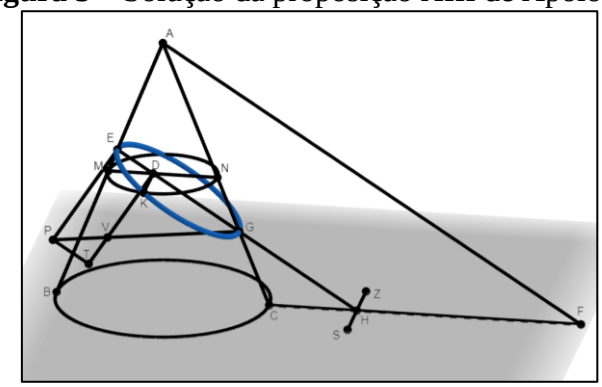
> linha reta traçada a partir da seção do cone, paralelo à seção comum dos planos, até o diâmetro da seção, será equivalente a uma área aplicada ao longo de uma determinada linha reta, com a qual a razão entre o diâmetro da seção é igual à razão do quadrado da reta, do topo do cone, paralelo ao diâmetro da seção, até a base do triângulo, até o retângulo delimitado sob as linhas que esta última linha recorta nas laterais do triângulo ([5]); área que tem como largura a linha cortada no diâmetro por esta primeira linha, na lateral do topo da seção, e reduzida por uma figura, semelhante ao retângulo delimitado pelo diâmetro e pelo parâmetro, e colocada de forma semelhante ([6]) . Chamamos essa seção de elipse (p. 28).

Segundo Eecke (1963, p. 29) e Unbaneja (2017, p.57-58), Apolônio brinda uma continuação à sua proposição XIII, no intuito de explicar sua definição da Elipse:

> Seja um cone de vértice A e que tem como base a circunferência BC, vamos cortá-lo por um plano que passa pelo eixo, que produzirá como seção o triângulo ABC, e por outro plano que não é nem paralelo nem oposto, cuja interseção com o cone dá a superfície cônica GEK com diâmetro EG. ZH perpendicular a BC do plano secante e da base do cone. Vamos traçar pelo ponto E a reta EP perpendicular a EG, por A a reta AE paralela a EG e vamos fazer com que a reta EG esteja para uma reta EP como o quadrado de FA para o retângulo formado por FB e FC, e finalmente, vamos desenhar um ponto qualquer K da seção, o paralelo KD a ZH. Digo que o quadrado KD equivale ao retângulo que, aplicado a EP, tem a largura ED reduzida numa figura semelhante ao retângulo das retas EG e EP.

A solução de Apolônio para sua proposição XIII do livro I é mostrada na figura 5 a seguir:

Figura 5 – Solução da proposição XIII de Apolônio



Fonte: Elaboração pelos Autores

Baseados na definição de Elipse de Apolônio, essa curva pode ser caracterizada da seguinte forma:

[5] Isto é, sob os segmentos que é paralelo ao diâmetro, traçado a partir do vértice do cone, corta na base estendida do cone do triângulo axial

[6]Esta afirmação equivale a dizer que, na seção cônica considerada, o quadrado da ordenada equivale a uma área retangular que, aplicada de acordo com o parâmetro, ou seja, tendo este parâmetro como comprimento, e tendo a abcissa como largura, é reduzido por outra área, semelhante àquela que tem o parâmetro para comprimento e o diâmetro para largura. Portanto, se designarmos a ordenada por y, a abcissa por x, o diâmetro por a e o parâmetro por p, o enunciado da proposição se traduz na relação: $y^2 = px - \frac{b}{a}x^2$, que é a equação cartesiana de uma elipse relacionada a eixos oblíquos, um dos quais é o diâmetro e o outro a tangente em sua extremidade.

Seja um cone de vértice A e que tem como base a circunferência BC, trazemos um plano que passa pelo eixo, que produzirá o triângulo axial ABC, logo o segmento BC é base do triângulo axial ABC. O segmento SZ no plano da base do cone é perpendicular à prolongação de BC. A curva GEK é uma Elipse gerada pela interseção do plano π com o cone, logo o segmento EH é a interseção da seção plana com o triângulo ABC. E é G são os pontos de interseção da curva com AB e AC respectivamente. Traçamos AF paralelo a EG e encontra-se com o prolongamento de BC no ponto F. O ponto K é um ponto qualquer pertencente à curva GEK, com o segmento KD perpendicular ao plano do triângulo axial ABC. Assim, KD é perpendicular a EG no ponto D. Por sua parte, o segmento MN é o diâmetro da seção circular determinada por um plano β que contém o segmento KD, sendo este paralelo à base BC. O segmento MN intercepta o lado AB em M e AC em N, logo KD é perpendicular a MN no ponto D. EP é um segmento perpendicular a EG e EP também está contido no plano perpendicular à seção cônica que passa por E. O retângulo $EDPT$ está situado num plano perpendicular ao plano da seção cônica. V é o ponto de interseção dos segmentos DT e PG.

Segundo Lopes (2011), o segmento EP é de extrema importância para a caracterização das curvas. Ainda segundo esse autor, é um parâmetro que Apolônio definiu em função dos lados do triângulo axial ΔABC e dos segmentos AE e AF da seguinte forma:

$$\frac{EP}{EG} = \frac{BF \cdot FC}{AF^2} \quad (2.7)$$

O ponto K é um ponto qualquer pertencente à curva GEK, com o segmento KD perpendicular ao plano do triângulo axial ABC. Assim, KD é perpendicular a FH no ponto D. Por sua parte, o segmento MN é o diâmetro da seção circular determinada por um plano que contém o segmento KD, sendo este paralelo à base BC. O segmento MN intercepta o lado AB em M e AC em N, logo KD é perpendicular a MN no ponto D.

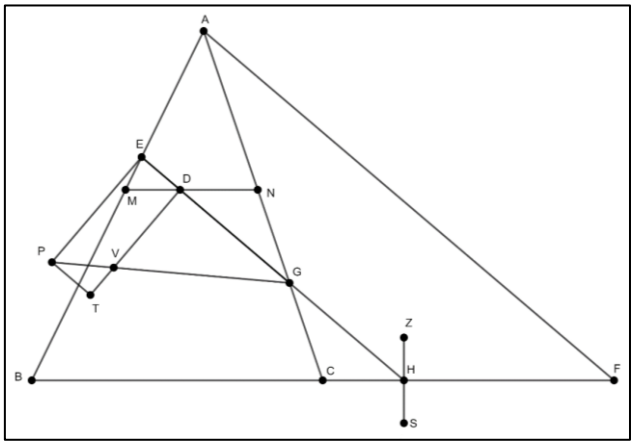
Por média proporcional, encontra-se:

$$KD^2 = MD \cdot ND \quad (1.1)$$

Sabe-se que EH não é paralelo ao lado AC do triângulo axial ΔABC, neste caso EH intercepta ao lado AC no ponto G. Agora, para a análise e caracterização da Elipse, Apolônio em sua definição relaciona o quadrado KD que equivale ao retângulo que, aplicado a EP, tem a largura ED reduzida numa figura semelhante ao retângulo das retas EG e EP.

Nesse sentido, considere-se o esquema obtido a partir da figura 5 e ilustrado na figura 6.

Figura 6 – Esquema obtido a partir da definição de Apolônio



Fonte: Elaboração pelos Autores

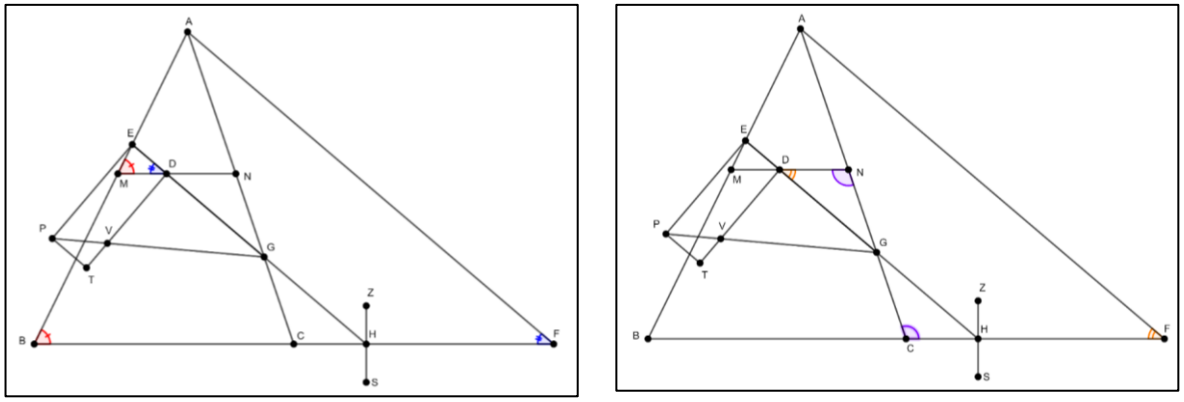
Por construção, MN é paralelo a BC e AF é paralelo EH, então os triângulos ΔABF e ΔEDM são semelhantes ($\Delta ABF \approx \Delta EDM$) pelo critério ângulo-ângulo (os ângulos $\widehat{ABF}$ $\widehat{EMD}$ são congruentes ($\widehat{ABF} \cong \widehat{EDM}$), por serem ângulos correspondentes entre paralelas, $MN \parallel BC$ e os ângulos $\widehat{AFB}$ e $\widehat{EDM}$ são congruentes ($\widehat{AFB} \cong \widehat{EDM}$), por serem ângulos correspondentes entre paralelas, $AF \parallel EH$ (Figura 7a), logo:

$$\frac{MD}{ED} = \frac{BF}{AF} \quad (2.8)$$

Da mesma maneira, DN é paralelo a FC e GD é paralelo a AF, então os triângulos ΔDNG e ΔACF são semelhantes ($\Delta DNG \approx \Delta ACF$) pelo critério ângulo-ângulo (os ângulos $\widehat{GDN}$ $\widehat{AFC}$ são congruentes ($\widehat{GDN} \cong \widehat{AFC}$), por serem ângulos alternos internos entre paralelas, $DN \parallel FC$ e os ângulos $\widehat{GND}$ e $\widehat{ACF}$ são congruentes ($\widehat{GND} \cong \widehat{ACF}$), por serem ângulos correspondentes entre paralelas, $GD \parallel AF$, ver Figura 7b), logo:

$$\frac{DN}{DG} = \frac{CF}{AF} \quad (2.9)$$

Figura 7 –. Semelhanças nos triângulos ($\Delta ABF \approx \Delta EDM$) e ($\Delta DNG \approx \Delta ACF$)



(a) (b)

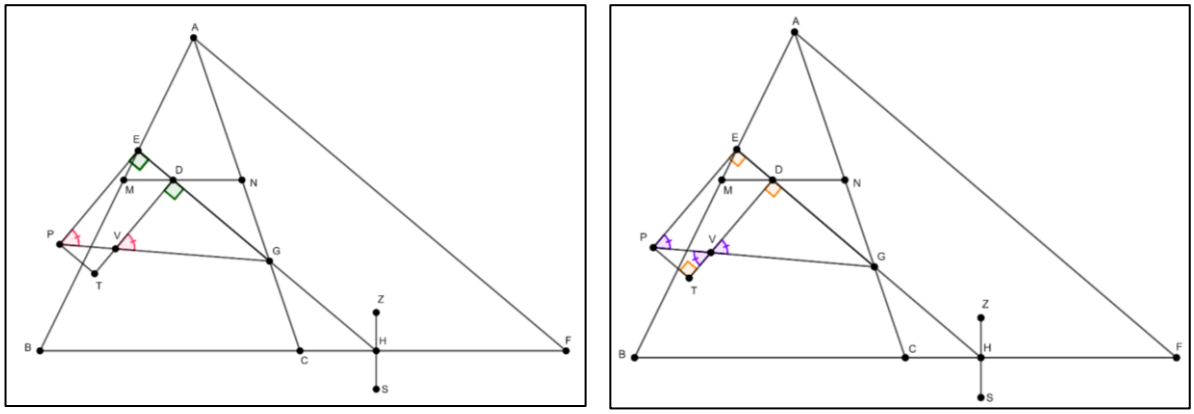
Fonte: Elaboração pelos Autores

Sabe-se também por construção que EP é paralelo a DV, então os triângulos ΔGEP e ΔGDM são semelhantes ($\Delta GEP \approx \Delta GDM$) pelo critério ângulo-ângulo (os ângulos $\widehat{GEP}$ $\widehat{GDV}$ são congruentes ($\widehat{GEP} \cong \widehat{GDV}$) e os ângulos $\widehat{GPE}$ e $\widehat{GDV}$ são congruentes ($\widehat{GPE} \cong \widehat{GDV}$), por serem ângulos correspondentes entre paralelas, $EP \parallel DV$ (Figura 8a), logo:

$$\frac{EP}{EG} = \frac{DV}{GD} \quad (2.10)$$

O segmento que passa pelos pontos colineares D, V e T é paralelo a EP e ED é paralelo a PT. Logo, os triângulos ΔGEP e ΔPTV são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo: os ângulos $\widehat{GPE}$ e $\widehat{GVD}$ são congruentes por serem correspondentes entre paralelas, os ângulos $\widehat{GVD}$ e $\widehat{TVP}$ são congruentes por serem opostos pelo vértice, logo os ângulos $\widehat{GPE}$ e $\widehat{TVP}$ são congruentes ($\widehat{GPE} \cong \widehat{TVP}$). Ainda os ângulos $\widehat{GDT}$ e $\widehat{PTV}$ também são congruentes por serem ângulos alternos internos entre paralelas, os ângulos $\widehat{GDT}$ e $\widehat{GEP}$ são congruentes por serem correspondentes entre paralelas, logo os ângulos $\widehat{GEP}$ e $\widehat{PTV}$ são congruentes ($\widehat{GEP} \cong \widehat{PTV}$) (Figura 8b). Daí: $\frac{VT}{TP} = \frac{EP}{EG}$ (2.11)

Figura 8 – Semelhanças nos triângulos (($\Delta GEP \approx \Delta GDM$) e ($\Delta GEP \approx \Delta PTV$)



(a) (b)

Fonte: Elaboração pelos Autores

Ainda como os segmentos ED e PT têm o mesmo comprimento, já que são lados do retângulo $EDTP$, obtém-se:

$$VT = \frac{EP}{EG} \cdot ED \quad (2.12)$$

Logo, segundo Lopes (2011), a expressão correspondente a essa curva pode ser obtida da seguinte forma: Dividindo (3.1) por $ED \cdot GD$ tem-se que,

$$\frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{MD \cdot DN}{ED \cdot GD} \quad (2.13)$$

Substituindo (2.8) e (2.9) encontra-se que:

$$\frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CF}{AF}, \text{ logo } \frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{BF \cdot CF}{AF^2} \quad (2.14)$$

Segundo Estrada *et al*. (2000), a relação da equação (2.13) mostra que a razão entre o quadrado de lado KD e o retângulo de lados DE e DG é independente do ponto K pertencente à cônica. Ainda segundo esses autores, Apolônio não toma essa propriedade como sintoma da cônica.

Então, fazendo uso de (2.7) e (2.10), obtém-se:

$$KD^2 = \frac{DV \cdot ED \cdot GD}{GD} \Longrightarrow KD^2 = DV \cdot ED \quad (2.15)$$

Logo, a equação $KD^2 = DV \cdot ED$ é uma expressão geral para a curva, com DV representando valores diferentes. Agora, escrevendo DV em função da constante EP, temos que: $DV = EP - VT$. Assim, pode-se escrever (2.15) da seguinte maneira

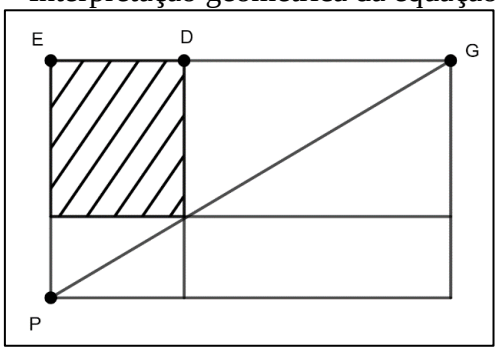
$$KD^2 = ED(EP - VT) \quad (2.16)$$

Ainda pela equação (2.12) podemos escrever (2.16) da seguinte maneira:

$$KD^2 = ED\left[EP - \left[\left(\frac{EP}{EG}\right) \cdot ED\right]\right] \text{ ou } KD^2 = ED \cdot EP - \frac{EP}{EG} \cdot ED^2 \quad (2.17)$$

A equação, interpretada geometricamente, é o mesmo que dizer que a área do quadrado aplicado ao segmento KD é igual à área do retângulo de lado a EP e altura ED, menos algum valor, neste caso seria $\frac{EP}{EG} \cdot ED^2$ (o retângulo de lados $\frac{EP}{EG} \cdot ED$ e ED) (Figura 9). Assim, a curva nesse caso é uma Elipse, termo originário do grego *ellipis*, que corresponde à aplicação de áreas (Estrada *et al*., 2000; Lopes, 2011).

Figura 9 – Interpretação geométrica da equação da elipse



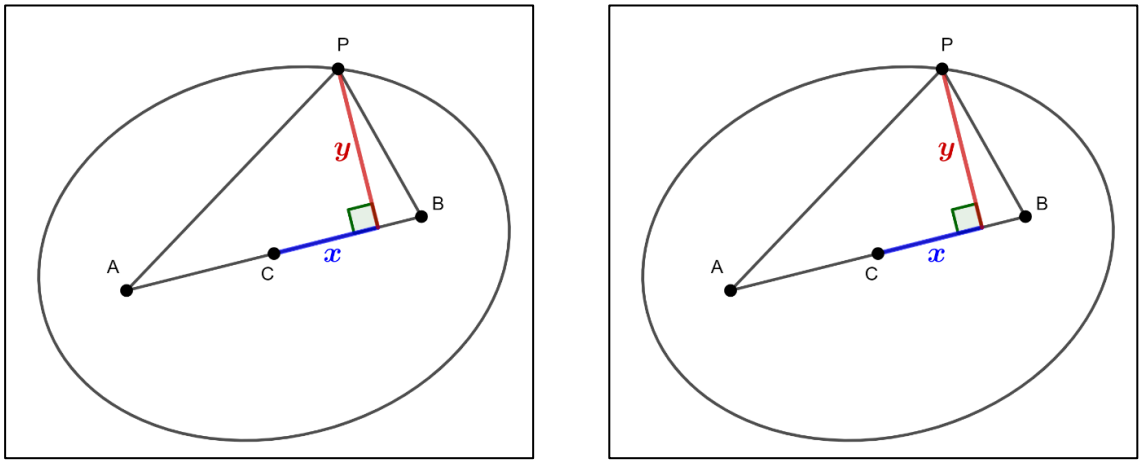
Fonte: Elaboração pelos Autores

Utilizando a linguagem usada hoje em dia, considere EP um parâmetro $EP = p$ e EG diâmetro $EG = d$ que irá representar o eixo maior da elipse, considerando ainda $KD = y$ e $ED = x$, a equação (2.17) fica como:

$$y^2 = xp - \frac{p}{d}x^2$$

Para seguir com o estudo da Elipse, vamos considerar a seguinte definição: "Uma Elipse é definida como o conjunto de todos os pontos do plano que atendem à condição $AP + BP = 2r$ e que estão em um único plano, onde A e B são os focos da Elipse (Smith, 2013). Nesse sentido, sejam A e B dois pontos arbitrários pertencentes a um plano. Escolhemos alguma distância arbitrária, maior do que a distância entre A e B. Definimos r como metade dessa distância, então a distância em si seria $2r$, daí $AP + BP = 2r$. C é o ponto médio entre A e B. Então, é do nosso interesse investigar as características da Elipse[7], especialmente a relação entre as distâncias x e y (Figura 10a).

Figura 10 – Gráfico da definição da elipse como lugar geométrico



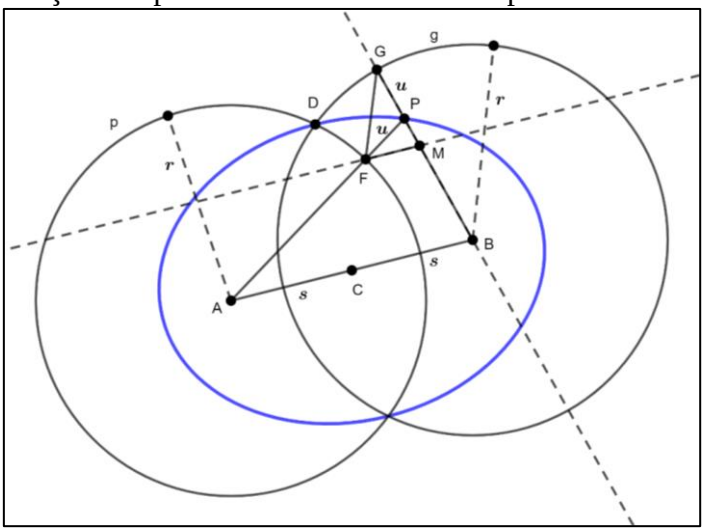
(a) (b)

Fonte: Elaboração pelos Autores

Seja o ponto D equidistante de A e B, pois está à distância r dos dois pontos, ou seja, $DA = r$ e $DB = r$. Vamos chamar s à distância AC, que é igual à distância CB, então $AC = s$, $CB = s$ e $AB = 2r$ (Figura 10b). A seguir, traçamos uma circunferência de raio r centrado no ponto A, que chamaremos de p, da mesma forma desenharemos outra circunferência de raio r centrado no ponto B, que chamaremos de g. F é o ponto de interseção da circunferência p com o segmento AP. G é o ponto de interseção da circunferência g com a reta que passa pelos pontos B e P. pelo ponto F tracemos uma reta paralela a AB e chamemos de M ao ponto de interseção dessa paralela com o segmento BP. Chamemos u à distância GP e PF, logo $GP = u$ e $PF = u$ (Figura 11).

[7] Toda fórmula é um registro escrito em forma de equação, da relação entre quantidades que podem ser medidas. Neste caso, as distâncias x e y

Figura 11 – Relações do ponto P com os focos da elipse e as circunferências g e p



Fonte: Elaboração pelos Autores

Observe na figura 43 que o ponto P está fora da circunferência centrada em A, portanto, a distância entre esses dois pontos é maior que r por certa distância, neste caso PF, porém, $PF = u$ então: $AP = r + u$ (3)

Ainda segundo a figura 11, o ponto P está dentro da circunferência centrada em B, portanto, a distância entre esses dois pontos é menor que r por certa distância, neste caso GP, porém, $GP = u$, logo: $BP = r - u$ (3.1)

Agora, considere o diagrama da Figura 12a a partir da Figura 11. Observe que os pontos C, F e G podem ser colineares. Segundo Smith (2013), para caracterizar a Elipse não precisamos provar, mas vale a pena. Logo, como FM é paralela com AM, os triângulos ΔPFM e ΔAPB são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, já que os ângulos $\widehat{PFM}$ e $\widehat{PAB}$ são congruentes por serem correspondentes entre paralelas e os ângulos $\widehat{PMF}$ e $\widehat{PBA}$ são congruentes por serem correspondentes entre paralelas, então: $\frac{FM}{AB} = \frac{FP}{AP}$ (3.2)

Substituindo os valores de AB, FP e AP em (3.2) temos: $\frac{FM}{2r} = \frac{u}{r+u} \Longrightarrow FM = \frac{2ru}{r+u}$ (3.3)

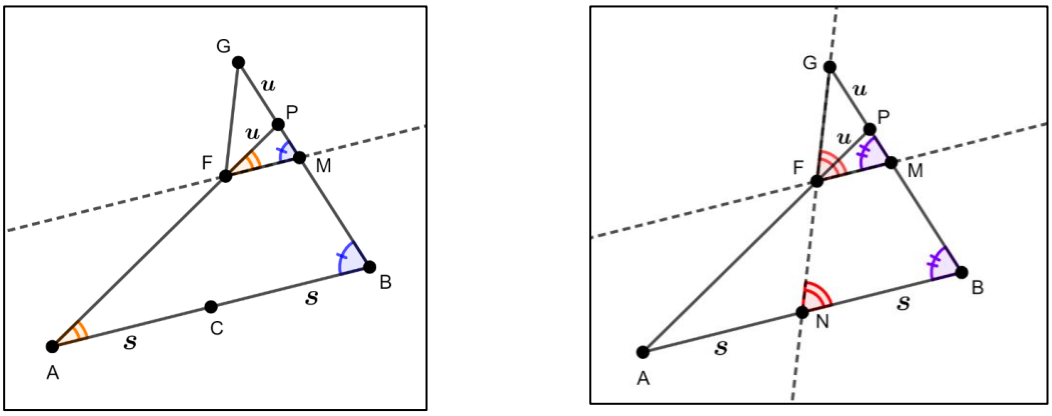
Dessa semelhança de triângulos também podemos dizer que:

$$\frac{PM}{PB} = \frac{FP}{AP} \quad (3.4)$$

Substituindo os valores de PB, FP e AP em (3.4) temos:

$$\frac{PM}{r-u} = \frac{u}{r+u} \Longrightarrow PM = \frac{u(r-u)}{r+u} \quad (3.5)$$

Figura 12 – Semelhanças nos triângulos ($\Delta PFM \approx \Delta APB$)



(a) (b)

Fonte: Elaboração pelos Autores

Agora, traçamos a reta que passa por GF, o ponto de interseção desta reta com AB chamaremos N. Observe o diagrama da figura 12b, os triângulos ΔNGB e ΔFGM são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, já que os ângulos $\widehat{GNB}$ e $\widehat{GFM}$ são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, e os ângulos $\widehat{GMF}$ e $\widehat{GBN}$ são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, logo:

$$\frac{NB}{FM} = \frac{GB}{GM} \Longrightarrow NB = \frac{FM \cdot GB}{GM} \quad (3.6)$$

Observe que:

$$GM = GP + PM \quad (3.7)$$

Sabemos que $GP = u$, então substituindo esse valor e a equação (3.5) em (3.7)

$$GM = u + \frac{u(r-u)}{r+u}$$

Resolvendo essa soma de frações, temos

$$\frac{u(r+u) + u(r-u)}{r+u} = \frac{u[(r+u) + (r-u)]}{r+u} = \frac{2ur}{r+u}$$

Dessa maneira, GM fica como:

$$GM = \frac{2ur}{r+u} \quad (3.8)$$

Ainda temos que, $GB = r$, então substituindo esse valor, a equação (3.3) e (3.8) em (3.6) temos que:

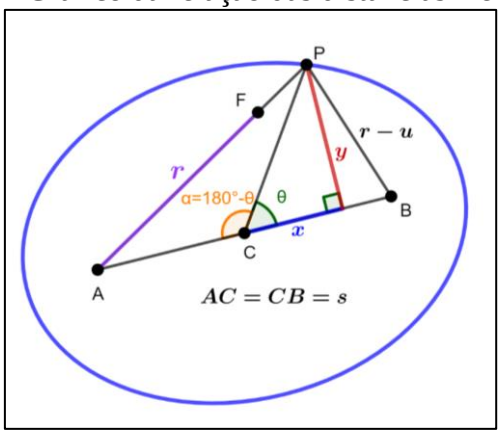
$$NB = \frac{\frac{2ru}{r+u}(r)}{\frac{2ur}{r+u}} \quad (3.9)$$

Logo, $NB = r$. Sabemos também que $AB = 2r$, então

$$AB = AN + NB \Longrightarrow AN = AB - NB \Longrightarrow AN = 2r - r \Longrightarrow AN = r$$

Isso mostra que N está entre A e B, especificamente, à mesma distância (s) de A e B. O ponto C ocupa a mesma posição, portanto os pontos C, F e G são colineares. Voltemos agora ao nosso propósito inicial, que é identificar uma relação entre as distâncias x e y. A partir dos dados da Figura 13, podemos obter expressões para PC e $\cos\theta$, o que nos permitirá desenvolver uma fórmula que relaciona x e y. Chamaremos θ ao ângulo $\widehat{PCB}$ e α ao ângulo $\widehat{PCA}$, o valor do ângulo α é $\alpha = 180° - \theta$.

Figura 13 – Gráfico da relação das distancias x e y na elipse



Fonte: Elaboração pelos Autores

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta \quad (3.10)$$

Então, aplicando a lei dos cossenos[8] ao triângulo ΔPCB

$$(r-u)^2 = (PC)^2 + (s)^2 - 2(PC)(S)\cos\theta$$

Desenvolvendo $(r-u)^2$ temos:

$$r^2 - 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 - 2(PC)(S)\cos\theta \quad (3.11)$$

Logo, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔPAC, temos:

$$(r+u)^2 = (PC)^2 + (s)^2 - 2(PC)(S)\cos(180° - \theta) \quad (3.12)$$

Porém, como $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ e desenvolvendo $(r+u)^2$a equação (3.12) fica:

$$r^2 + 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 + 2(PC)(S)\cos(\theta) \quad (3.13)$$

Subtraindo a equação (3.11) de (3.13) obtemos

$$\begin{array}{rl} & r^2 - 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 - 2(PC)(S)\cos\theta \\ - & r^2 + 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 + 2(PC)(S)\cos(\theta) \\ \hline & 4ru = 4(PC)(s)\cos\theta \end{array}$$

[8] A lei dos cossenos é usada para encontrar as partes que faltam em um triângulo oblíquo (não um triângulo retângulo) quando as medidas dos dois lados e a medida do ângulo incluído são conhecidas. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

$$(PC)\cos\theta = \frac{ru}{s}$$

Porém, $PC\cos\theta = x$, então

$$x = \frac{ru}{s} \quad (3.14) \text{ é } u = \frac{sx}{r} \quad (3.15)$$

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ΔPCE, para determinar y, temos que

$$y^2 = (PC)^2 - x^2 \quad (3.16)$$

Agora precisamos conhecer alguma expressão para PC. Se somarmos as equações 5.11) e (3.13), tem-se:

$$\begin{array}{rl} & r^2 - 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 - 2(PC)(S)\cos\theta \\ + & r^2 + 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 + 2(PC)(S)\cos(\theta) \\ \hline & 2r^2 + 2u^2 = 2(PC)^2 + (s)^2 \end{array}$$

Então, simplificamos:

$$2(r^2 + u^2) = 2[(PC)^2 + (s)^2]] \Longrightarrow (PC)^2 = r^2 + u^2 - s^2 \quad (3.17)$$

Logo, substituindo (3.17) em (3.16) temos

$$y^2 = r^2 + u^2 - s^2 - x^2 \quad (3.18)$$

Substituindo a equação (3.15) em (3.18) temos:

$$y^2 = r^2 - s^2 + \left(\frac{sx}{r}\right)^2 - x^2 \Longrightarrow y^2 = (r^2 - s^2) + \left(\frac{s^2x^2}{r^2} - x^2\right)$$

$$y^2 = (r^2 - s^2) + \left(\frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{x^2r^2}{r^2}\right) \Longrightarrow y^2 = (r^2 - s^2) + \left(\frac{s^2x^2 - x^2r^2}{r^2}\right)$$

$$y^2 = (r^2 - s^2) + \frac{(s^2 - r^2)x^2}{r^2} \quad (3.19)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade da equação (3.19) por r^2

$$r^2y^2 = r^2(r^2 - s^2) + (s^2 - r^2)x^2 \quad (3.20)$$

Logo, então, tirando o fator comum -1 da expressão $(s^2 - r^2)$

$$r^2y^2 = r^2(r^2 - s^2) - (r^2 - s^2)x^2 \Longrightarrow (r^2 - s^2)x^2 + r^2y^2 = r^2(r^2 - s^2) \quad (3.21)$$

Se dividirmos ambos os lados da equação (3.21) por $r^2(r^2 - s^2)$, obtemos

$$\frac{(r^2 - s^2)x^2}{r^2(r^2 - s^2)} + \frac{r^2y^2}{r^2(r^2 - s^2)} = \frac{r^2(r^2 - s^2)}{r^2(r^2 - s^2)} \Longrightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{(r^2 - s^2)} = 1 \quad (3.22)$$

Na expressão na equação (3.22) considerando $a = r$ e $b = r^2 - s^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1 \quad (3.23)$$

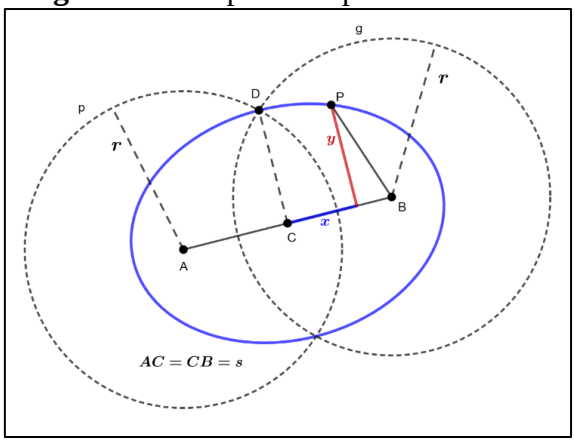
Para chegar na expressão semelhante à equação da Elipse encontrada em livros didáticos (Lima, 2015):

$$b = r^2 - s^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = \sqrt{r^2 - s^2}$$

Logo, podemos escrever (3.22) da seguinte maneira $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3.24)

Dessa forma, segundo Smith (2013), é possível compreender o significado das quantidades s e r na equação da Elipse. Lembrando que s é a metade da distância entre os focos e r é a metade da soma das distâncias entre qualquer ponto que pertença à Elipse (Figura 14) e os dois focos.

Figura 14 – Elipse num plano cartesiano



Fonte: Elaboração pelos Autores

Nos livros didáticos de geometria analítica, como no caso de Lima (2015) e outros, podemos observar que o processo para determinar a equações das curvas supracitadas é excessivamente simplificado pelo que é chamado de "álgebra de coordenadas". Um processo que parte da determinação das equações de curvas entendidas como lugares geométricos. Uma matemática que, como vimos, tem como seu precursor mais atual Pierre de Fermat. Esse matemático, porém, não chegou a essa sofisticação por acaso, mas a partir de estudos de outros processos de criatividade e (re)invenção da Matemática que foi desenvolvida desde os tempos de Meneâcmo e Apolônio, a qual é invisível nos livros didáticos atuais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após uma leitura e reflexão geral acerca do tema, ao longo das seções deste artigo, foi possível reconhecer o desenvolvimento histórico e epistemológico nos métodos de determinar a equação da referida cônica desde Menêcmo com a Oxytome, das contribuições de Apolônio com a Elipse até chegar na expressão que corresponde ao lugar geométrico dos pontos que pertencem a esta curva em particular.

Nesse cenário, conseguimos materializar um movimento sequencial histórico, no qual utilizamos a História da Matemática para apoiar o Ensino da Elipse de maneira a apresentar uma abordagem além do corte entre um plano e um cone reto, descrevendo os diversos métodos para determinar a equação da Elipse até chegar à expressão reduzida dela, estabelecendo formas de pensar e agir tanto geometricamente como algebricamente ao longo do sequencial. Embora não seja foco desse trabalho salientar as potencialidades de tecnologias digitais, como o GeoGebra, queremos destacar o papel deste software na realização das figuras de maneira precisa e que, no meio da investigação histórica, este teve um papel importante na compreensão de algumas correlações geométricas e algébricas nos métodos para determinar as equações da Parábola descritos no sequencial histórico.

Finalmente, consideramos que este trabalho representa um aspecto importante para novos estudos investigativos sobre o desenvolvimento, apropriação e representação histórica desta cônica e de outras curvas no campo da matemática em seu caráter científico e disciplinar.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas do Pará (FAPESPA) e da Universidade Federal do Pará.

REFERÊNCIAS

BORDALLO, Mirella. **As Cônicas na matemática escolar brasileira**: história, presente e futuro. 2011. 71f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) –Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2011

BORGES, Thays de Souza. **Geometria analítica nos livros didáticos**: uma análise do modelo epistemológicos dominante para o ensino de cônicas no ensino médio. 2023. 117f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2023.

FOSSA, Jhon A. Recursos pedagógicos para o ensino da matemática a partir das obras de dois matemáticos da Antigüidade. *In*: Mendes, Iran Abreu; FOSSA, John; NÁPOLES VALDÉS, Juan E. (org.). **A História como um Agente de Cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 79–136.

EECKE, Paul Ver. **Les coniques d'apollonius de perge**. 1963. 724 p.

ESTRADA, Maria; SÁ, Carlos; QUEIRÓ, João; SILVA, Maria do Céu; COSTA, Maria. **História da Matemática**. Universidade Aberta, 2000, 611p

LIMA, Elon. **Geometria analítica e álgebra linear**. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

MENDES, Iran Abreu. A investigação Histórica como Agente de Cognição Matemática na sala de aula. *In*: Mendes, Iran Abreu; FOSSA, John; NÁPOLES VALDÉS, Juan E. (org.). **A História como um Agente de Cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 79–136.

LOPES, Juracélio Ferreira. **Cônicas e aplicações**. 2011. 184f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Universitária) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.

MENDES, Iran Abreu. **Usos da história no ensino de matemática: reflexões e experiências**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2022, 316 p.

MONTEIRO, Rubens Marinho**. Resgate do Teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o GeoGebra**. 2014. 57f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Vitória, 2014.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; MENDES, Iran Abreu; CASTILLO, Luis Andrés. Atividades históricas com GeoGebra para explorar a representação geométrica do cone. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 11, n. 1, p. e23117, 2023. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16866.

SIQUEIRA, Carlos Alberto Fernandes de. **Um estudo didático das cônicas: quadros, registros e pontos de vista**. 2016. 167f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SILVA FILHO, Luiz Efigênio da. **Cônicas**: apreciando uma obra-prima da matemática. 2015. 141f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

SMITH, James. **Las Bellezas Geométricas atrás de las Fórmulas Feas**, 2013. Disponivel em: www.aprendematematicas.org.mx

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**, 1. ed. Makron Books, 1987.

URBANEJA, Pedro Miguel. **El domínio de las secciones cónicas Apolônio**. RBA: Espanha, 2017.

Histórico
Submetido: 18 de novembro de 2023
Aprovado: 16 de fevereiro de 2024
Publicado: 04 de março de 2024

Como citar o artigo - ABNT
SÁNCHEZ, I. C.; CASTILLO, L. A.; MENDES, I. A. Conexões Históricas e Epistemológico entre a Oxytome e a Elipse: Implicações para o Ensino de Seções Cônicas. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática** (MT), v. 7, e2024003, 2024.
https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172. e2024003

Licença de Uso
Licenciado sob Creative Commons Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0). Esta licença permite compartilhar, copiar, redistribuir o manuscrito em qualquer meio ou formato. Porém, não permite adaptar, remixar, transformar ou construir sobre o material, tampouco pode usar o manuscrito para fins comerciais. Sempre que usar informações do manuscrito dever ser atribuído o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico.