COINSPIRAÇÃO
Revista dos Professores que Ensinam Matemática

O que podemos afirmar sobre o quadrilátero formado pelos pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer? Em destaque, a relação entre as áreas

Eberson Paulo Trevisan[1]
Universidade Federal de Mato Grosso

RESUMO

Neste artigo, apresentamos algumas particularidades destacadas em um trabalho realizado com licenciandos e professores em formação continuada de matemática, em que buscamos explorar uma propriedade geométrica envolvendo o quadrilátero obtido com pontos médios sobre os lados de um quadrilátero qualquer. Procuramos mostrar que a forma como a proposição é apresentada aos alunos pode conduzir as investigações mais significativas, visando explorar mais do que a propriedade em si solicitada explicitamente. Para tal, faz-se necessário o reconhecimento explícito da importância da visualização de figuras geométricas para o ensino de geometria, especialmente, amparado por um olhar sobre a figura que busque ver mais do que a figura nos impõe de imediato, tendo em vista sempre possibilitar explorar outras propriedades não explícitas a um primeiro olhar sobre a figura.
Palavras-chave: Ensino de Geometria. Investigação. Quadriláteros. Relação entre áreas.

What can we affirm about the quadrangle formed by the midpoints of the sides of any quadrangle? Featured the relationship between the areas

ABSTRACT

In this article, we present some particularities highlighted in a work carried out with undergraduates and teachers in continuing mathematics training, in which we seek to explore a geometric property involving the quadrilateral obtained with midpoints on the sides of any quadrilateral. We seek to show that the way the proposition is presented to students can lead to more meaningful investigations in order to explore more than the property itself explicitly requested. For this, it is necessary to explicitly recognize the importance of viewing geometric figures for the teaching of geometry, especially supported by a look at the figure that seeks to see more than the figure imposes on us immediately, always in view of making possible to explore other non-explicit properties at first glance at the figure.
Keywords: Geometry teaching. Investigation. Quadrangle. Relationship between the areas.

¿Qué podemos decir del cuadrilátero formado por los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero? En destaque, la relación entre las áreas

RESUMEN

[1] Doutor em Educação em Ciências e Matemática pela Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC) /UFMT. Docente da Universidade Federal de Mato Grosso, Campus Universitário de Sinop, MT, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Alexandre Ferronato, número 1200, Sinop, MT. Brasil, CEP: 78550-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8789-5227. Lattes: http://lattes.cnpq.br/3701989564065584 E - mail: eberson.trevisan@ufmt.br.

En este artículo presentamos algunas particularidades destacadas en un trabajo realizado con estudiantes de pregrado y docentes de educación continua en matemáticas, en el cual buscamos explorar una propiedad geométrica que involucra al cuadrilátero obtenido con puntos medios en los lados de cualquier cuadrilátero. Intentamos mostrar que la forma en que se presenta la proposición a los estudiantes puede conducir a investigaciones más significativas, con el objetivo de explorar más que la propiedad en sí explícitamente solicitada. Para ello, es necesario reconocer explícitamente la importancia de la visualización de las figuras geométricas para la enseñanza de la geometría, sobre todo apoyada en una mirada a la figura que busque ver más de lo que la figura nos impone de forma inmediata, con miras a posibilitar siempre explorar. otras propiedades no explícitas a primera vista de la figura.
Palabras clave: Enseñanza de la Geometría. Investigación. quads. Relación entre áreas.

INTRODUÇÃO

No presente artigo, apresentamos uma versão revisada e ampliada da apresentação de trabalho realizada no VII Congresso Internacional de Ensino de Matemática como o título: o quadrilátero formado pelos pontos médios dos lados de outro quadrilátero qualquer: destacando a relação entre as áreas. No artigo, buscamos olhar para diferentes possibilidades de trabalho com a proposição geométrica a qual afirma que: os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo. Defendemos que, tal proposição, em um cenário de ensino, não deve ser apresentada aos alunos de forma afirmativa como ocorre acima, mas de modo a convidar os alunos a investigarem sobre possíveis relações existentes, por exemplo, questionando: o que podemos afirmar sobre o quadrilátero formado pelos pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer? Evidenciamos em algumas situações de ensino que outras relações podem e são estabelecidas, além da afirmação trazida na proposição original (se tratar de um paralelogramo), como a proporcionalidade entre as áreas dos quadriláteros, que possibilita explorar outros elementos durante a aula.

Tal fato, inicialmente, foi evidenciado em uma experiência realizada por nós com alunos de graduação em Matemática, e professores de matemática em um curso de extensão oferecido de forma a contemplar um momento de formação. Neste curso, a atividade foi apresentada aos participantes como enunciada acima. No trabalho com a investigação das relações estabelecidas, alguns grupos de trabalho partiram da afirmação de haver uma relação de proporcionalidade entre as áreas, para, posteriormente, observarem que a figura geométrica em questão era um paralelogramo.

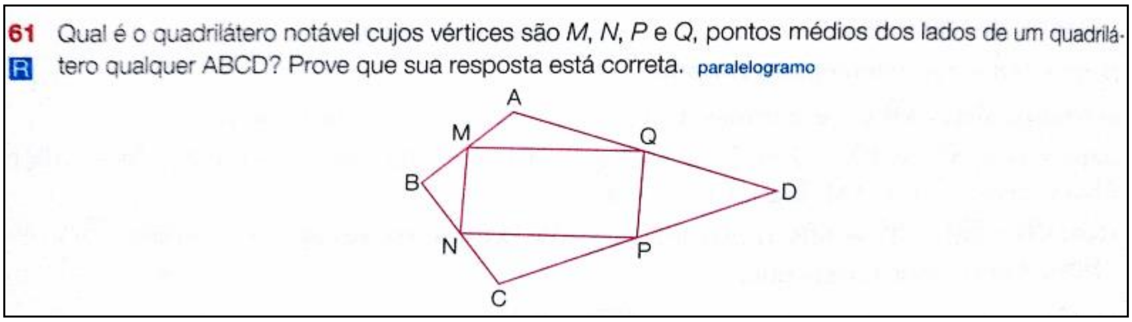
Esta primeira constatação da proporcionalidade pode ser justificada pela valorização da visualização de elementos 2D frente a figuras geométricas, como sugere a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, apresentada em Duval (2011, 2014). Ao mesmo tempo, abre a possibilidade de validar essa relação de proporcionalidade observada, tornando o trabalho com a proposição mais significativa ao cenário de ensino, como mostraremos nas próximas seções deste artigo.

Apesar do trabalho investigativo motivador do estudo ter sido realizado por um grupo de graduandos e professores em formação, a proposição explorada, bem como os elementos que buscamos destacar, a nosso ver, se aproximam de interesses da Educação Matemática, pois refletem em atividades que podem facilmente ser exploradas no cenário de ensino, ou adaptadas a outras propriedades geométricas ou de outras áreas, buscando um ensino de matemática mais investigativo do que repetitivo e decorativo.

A PROPOSIÇÃO DOS PONTOS MÉDIOS DE UM QUADRILÁTERO

A proposição dos pontos médios de um quadrilátero, como enunciada na introdução do artigo, estabelece que: o quadrilátero cujos vértices são os pontos médios dos lados de outro quadrilátero é um paralelogramo. Esta proposição pode ser encontrada em algumas coleções de livros didáticos do ensino fundamental no Brasil. Em análise efetuada em cinco coleções de livros didáticos, utilizados nas escolas públicas da rede estadual de ensino do município de Sinop, Mato Grosso, realizada em Trevisan (2016), observou-se que somente uma dessas coleções explorava a proposição, neste caso específico, na seção dos exercícios propostos, como sugere a Figura 1.

Figura 1- Proposição explorada no livro didático *Coleção Matemática e Realidade*, 8º ano.


61 Qual é o quadrilátero notável cujos vértices são *M*, *N*, *P* e *Q*, pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer ABCD? Prove que sua resposta está correta. paralelogramo

R

Fonte: Iezzi *et al.* (2009, p. 238).

Tal proposição é consequência de uma aplicação direta do conhecido teorema da base média de um triângulo, por isso, no livro didático em questão, encontramos essa atividade na seção de exercícios que exploram esse teorema. A saber, o teorema da base média de um triângulo afirma que: se um segmento tem extremidade nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é paralelo ao terceiro lado e tem medida igual à metade deste terceiro lado.

A prova para esse teorema será omitida aqui, a seguir, mas ela pode ser encontrada em Trevisan (2016), ou em muitos livros de geometria, como Dolce e Pompeu (1993).

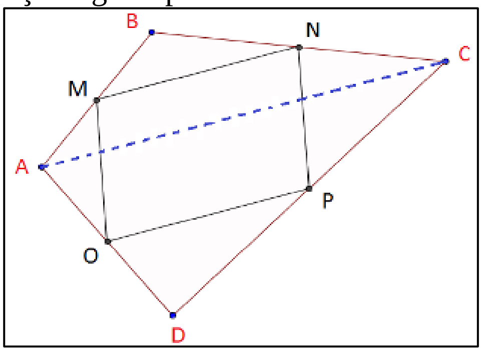
Para a aplicação do teorema da base média de um triângulo, é necessário empregar, sobre a representação figural, o chamado "olhar do inventor", segundo a teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval. Na teoria, um dado problema de geometria pode ser resolvido adicionando elementos não existentes inicialmente na figura, fazendo assim aparecer na figura elementos que permitam utilizar outras proposições e teoremas. Duval (2005, p. 07) destaca que essa forma de olhar para a figura se opera a partir de "uma DESCONSTRUÇÃO VISUAL das formas perceptíveis elementares que se impõem à primeira vista" (tradução nossa, grifo do autor).

A desconstrução visual mencionada no parágrafo anterior, também chamada pelo autor mais recentemente de desconstrução dimensional, (DUVAL, 2014) faz menção a operação cognitiva que realizamos ao transitar pelas diferentes dimensões de uma figura, a fim de explorar diferentes propriedades ou reconhecer novos caminhos para avançar frente a essa operação. Ela é fundamental para a aprendizagem da geometria, como vemos:

> é preciso considerar que levar um olhar de superfícies e seus contornos para um olhar de pontos e retas, por exemplo, falando especificamente da passagem de desconstrução 2D para 1D, se apresenta como uma questão decisiva na aprendizagem da geometria, já que sem esse olhar, o ensino das propriedades geométricas e suas formulações podem se tornar esvaziadas. (SOUZA, MORETTI E ALMOULOUD, 2019, p. 327).

A desconstrução dimensional, alicerçada pelo olhar inventor, se efetiva na prova da proposição em destaque no artigo, com o uso do teorema da base média de um triângulo, frente à representação do quadrilátero inicial, pela adição do segmento AC, como ilustra a Figura 2 apresentada na sequência.

Figura 2- Representação figural para encaminhamento da prova do teorema.



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra.

A partir dessa construção, ou seja, ao sair da visão sobre a figura do quadrilátero bidimensional para adicionar o segmento AC, elemento unidimensional, isto é, efetuando-se uma desconstrução dimensional, a argumentação se torna relativamente simples, pois será baseada na aplicação do teorema da base média de um triângulo, em que temos:

- M ponto médio de AB (hipótese do enunciado);
- N ponto médio de BC (hipótese do enunciado);
- Logo, pelo teorema da base média de um triângulo, considerando o ΔABC, temos que MN // AC;
- De modo análogo, olhando para ΔACD, temos que OP // AC. Logo, OP // MN.

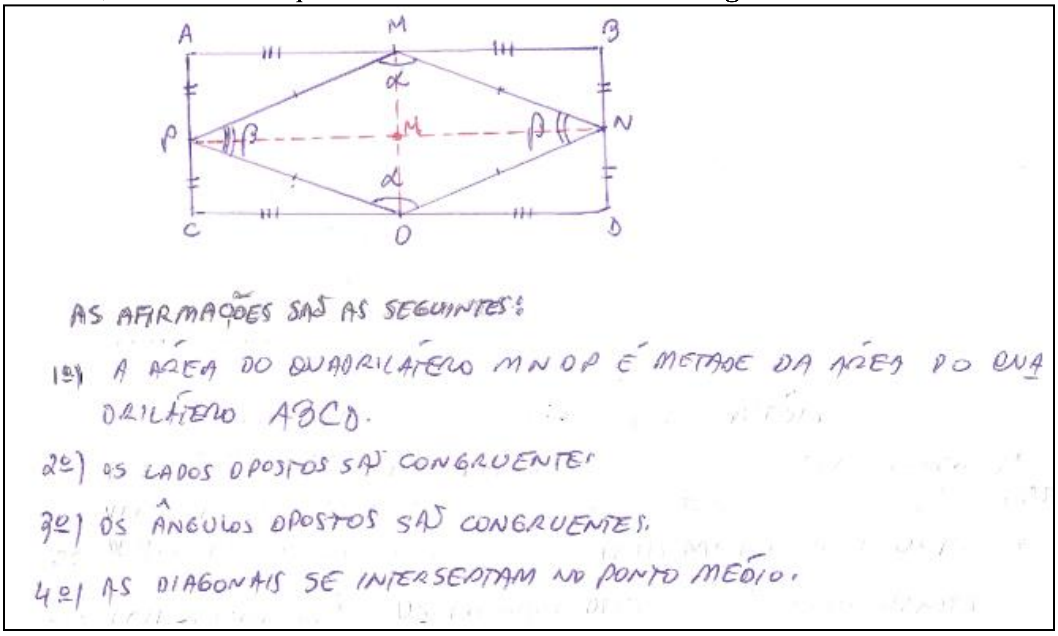
Pelo mesmo raciocínio, a partir da construção de BD, mostra-se que OM // PN. Dessa forma, OMNP tem os lados opostos paralelos e, portanto, pela definição de paralelogramo, este quadrilátero será um paralelogramo.

A RELAÇÃO ENTRE AS ÁREAS

Posto este problema a um grupo de alunos de graduação em Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática e professores de Matemática da educação básica, participantes de um curso de extensão, ao todo, 3 alunos de cada uma dessas classes participaram do curso. O problema no curso foi explorado de forma a não afirmar a propriedade, como ocorre na atividade do livro didático apresentada antes, mas sim de forma a deixar livre para os professores e acadêmicos investigarem as possíveis relações existentes. Afirmações e conclusões, frutos da investigação, foram entregues pelos participantes no final da atividade, além de uma socialização entre os grupos sobre as descobertas realizadas, dando encaminhamento a outras atividades.

Entre os materiais entregues, ganha destaque aqui a possibilidade levantada por eles da investigação da relação existente entre as áreas dos quadriláteros. Como vemos na Figura 3 a seguir, primeiramente, as relações apontadas pelos professores de matemática.

Figura 3- Relações destacadas por um trio de professores de Matemática ao investigarem o problema, assumindo o quadrilátero como sendo um retângulo.



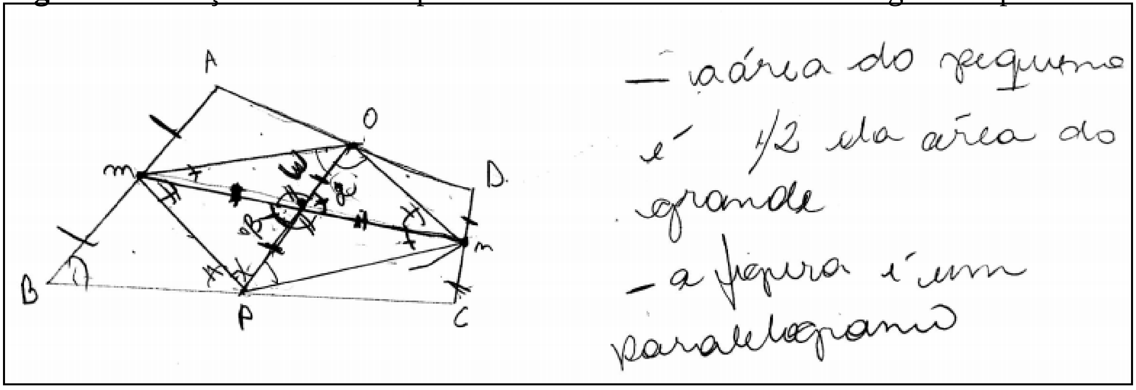
Fonte: Material elaborado por professores de Matemática de um curso de Extensão.

Neste grupo de professores (composto por três integrantes), o problema foi estudado em um caso particular de quadriláteros, o retângulo, como a representação figural utilizada e a que os argumentos apresentados sugerem. Para validar as observações, os professores se apoiam nos casos de congruência de triângulos. Apesar dessas afirmações entregues, os professores não generalizam a propriedade para o caso geral de quadrilátero qualquer, construindo argumentos mais próximos as provas empíricas nos termos destacados do Trevisan e Freitas (2019).

Contudo, o primeiro elemento levantado por eles diz respeito justamente à relação entre as áreas. O restante das observações levantadas, itens 2, 3 e 4 na Figura 3, são elementos suficientes para caracterizar um paralelogramo. A representação figural neste caso é utilizada para dar suporte à investigação conduzida, em que os resultados são sintetizados nos itens apontados pelo grupo.

No grupo de alunos da graduação (composto por três integrantes), a investigação conduzida por eles também levanta a possibilidade das áreas dos quadriláteros serem uma o dobro da outra, como ilustra a Figura 4. Esse grupo também busca utilizar a figura para dar suporte as suas observações.

Figura 4 - Relações destacadas por um trio de acadêmicos ao investigarem o problema.



Fonte: Material elaborado por graduandos em Matemática de um curso de Extensão.

Nenhum dos grupos elaborou formalmente uma demonstração matemática para as afirmações realizadas, mas destacamos que ambos os grupos investigam primeiro a relação entre as áreas das figuras.

Tal investigação pode ser justificada pela forma como os alunos, muitas vezes, olham para as figuras em geometria e a forma como nosso olhar tende a privilegiar a visualização de elementos bidimensionais (2D). A forma de olhar para as figuras, como Duval (2014) destaca em sua teoria, necessita ser superada pelos alunos para um trabalho em matemática mais significativo.

> Ensinar os alunos a verem figuras como os matemáticos as veem, pois, esta condição é essencial para a aquisição de conhecimentos em Geometria e para torná-los capazes de utilizá-los em outra situação. Concretamente isso significa que é necessário, primeiramente, fazer com que os alunos passem da maneira natural de ver as figuras, que consiste em um reconhecimento perceptivo imediato de contornos fechados em 2D, à maneira matemática de olhá-las que, ao contrário, focaliza retas e segmentos 1D e pontos de intersecção 0D. Isso leva a ver uma rede de retas subjacentes às diferentes formas 2D reconhecidas em primeiro olhar (DUVAL, 2014, p. 15).

O emprego de um olhar que vai além do reconhecimento dos contornos fechados e que são impostos a ver de imediato, leva-nos a operar uma desconstrução das formas, desconstrução essa muitas vezes necessária para modificar a figura, a fim de possibilitar a utilização de outros elementos matemáticos.

A indicação dada pela figura, que acompanha as observações dos grupos, indica que eles trabalharam com os lados dos quadriláteros também, especialmente pelas marcações de congruências que as figuras apresentam. No entanto, esse trabalho não os levou a empregar um olhar inventor nos termos de Duval (2005), para poder fazer uso de outras propriedades, como é o caso do teorema da base média de um triângulo, pois, como vemos nas Figuras 3 e 4, nenhuma contém a inserção de segmentos, para fazer uso de tal propriedade.

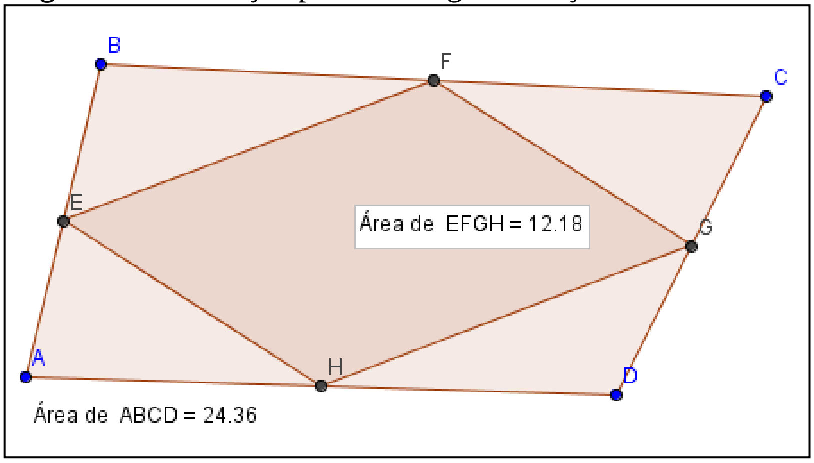
No entanto, a observação da relação existente entre as áreas nos proporcionou encaminhar alternativas para provarmos tal relação, tanto de uma forma experimental, com o uso do *software* GeoGebra quanto encaminhar a demonstração dessa relação como consequência do teorema da base média de um triângulo, como mostraremos na próxima seção do trabalho. Essa possibilidade de aproveitar elementos trazidos pelos alunos, especialmente a partir das indagações levantadas por eles, nos permitem boas oportunidades de se lançar em investigações, buscando tornar significativo o aprendizado dos envolvidos, como destacado em Trevisan (2019).

ANÁLISES E RESULTADOS

Todas essas relações levantadas podem ser facilmente verificadas de maneira experimental com a utilização de um *software* de geometria dinâmica, por exemplo, o GeoGebra. Ele pode inclusive ser utilizado primeiro para conjecturar sobre tais relações. Focaremos aqui nossa atenção na relação existente entre as áreas dos quadriláteros.

Para tal investigação, podemos utilizar a construção de um quadrilátero qualquer e dos pontos médios sobre os lados, podemos então formar outro quadrilátero ligando esses pontos médios. Utilizando o recurso do *software* de cálculo da área do quadrilátero podemos exibir na tela do computador a área de cada um desses quadriláteros, como ilustra a Figura 5 a seguir.

Figura 5: Construção para investigar a relação entre as áreas.



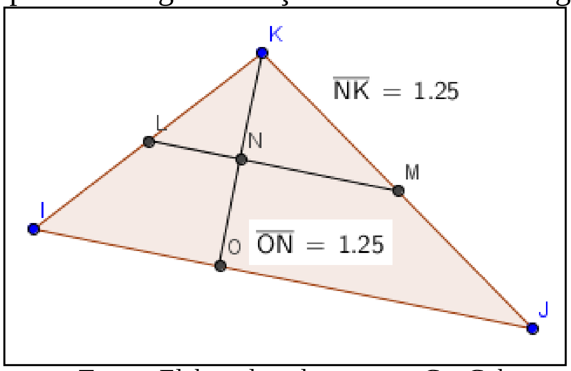
Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra.

Realizada a construção, podemos movimentar o quadrilátero ABCD de forma a obter outras configurações, mas, ao mesmo tempo, tais movimentos permitem observar que a área do quadrilátero interno será sempre metade da área do quadrilátero externo.

Uma das formas de se constatar formalmente que essa relação entre as áreas é verdadeira pode ser dada a partir do próprio teorema da base média de um triângulo. Porém, para tal, devemos observar que o segmento médio do triângulo divide a altura do triângulo em dois segmentos de igual tamanho.

Essa observação pode ser também feita inicialmente no GeoGebra e posteriormente validada. No GeoGebra, o procedimento de investigação pode ser igual ao utilizado no quadrilátero anterior, como ilustra a Figura 6. Para validação matemática de tal constatação, basta observar que os triângulos KML e KJI são triângulos semelhantes e KO=2KN, logo KN=NO.

Figura 6 - Construção para investigar a relação entre altura e o segmento médio no triângulo.



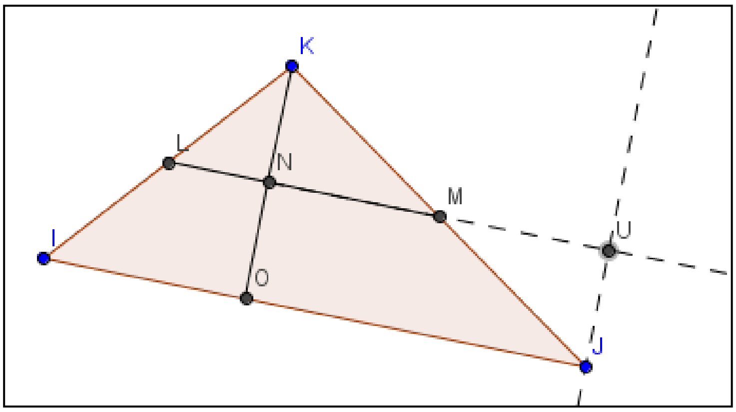
Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra.

Uma prova, utilizando elementos geométricos diferentes, também poderia ser explorada seguindo a mesma linha de raciocínio empregada para provar o teorema da base média de um triângulo. Para tal, poderíamos:

- a partir de J construir paralela a KO (construção ilustrada na Figura 7);
- construir a semirreta que contém NM;
- marcar o ponto U no encontro da paralela construída a partir de J com a semirreta por NM;

- dessa forma, se KN // UJ (construção), então $M\hat{K}N \equiv M\hat{J}U$ (Teorema das paralelas cortadas por uma transversal[2]), como $N\hat{M}K \equiv U\hat{M}J$ (opostos pelo vértice) temos que, pelo caso de congruência de triângulos ALA, os ΔKMN ≡ ΔJMU, logo KN ≡ JU;
- como IJ // LU (base média do triângulo) e KO // UJ (construção), temos que NUJO é um paralelogramo, logo UJ é congruente a NO, então pelo item anterior, NO é também congruente a KN;
- outra alternativa ao argumento contido nesse último item seria observar que $J\hat{O}N \equiv O\hat{N}M \equiv O\hat{J}U \equiv 90^0$ logo $J\hat{U}N \equiv 90^0$ também, pois a soma dos ângulos internos de um quadrilátero equivale sempre a 360º e, assim, o quadrilátero NUJO é um retângulo, logo UJ é congruente a NO, então NO é também congruente a KN.

Figura 7- Construção para encaminhamento da prova explorando outras propriedades geométricas.

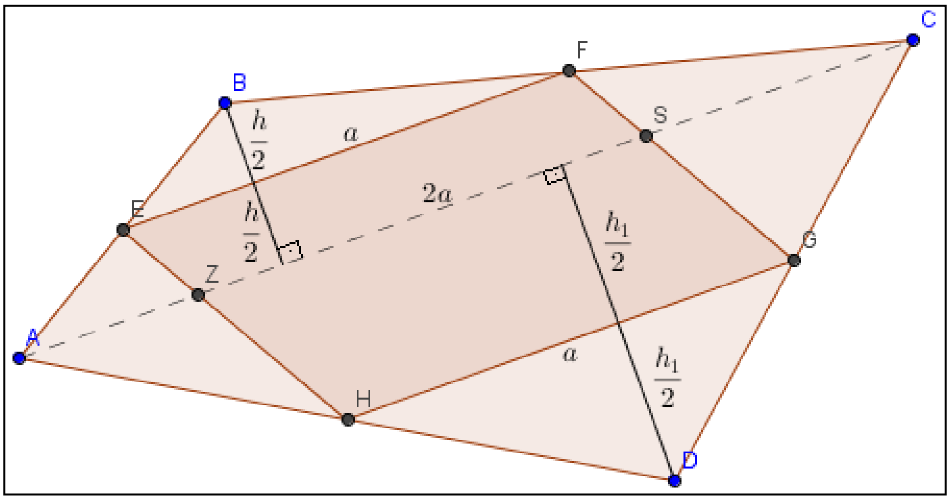


Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra.

Conhecendo então a relação apresentada acima sobre a altura do triângulo dividida pela base média, ou seja, que a base média divide essa altura em duas partes congruentes, podemos mostrar a relação entre as áreas pelo cálculo algébrico das áreas dos triângulos ABC e CDA e o cálculo algébrico da área do paralelogramo EFGH. Para tal, podemos nos apoiar na ilustração apresentada na Figura 8.

[2] Teorema: Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos (ou os ângulos correspondentes) são congruentes.

Figura 8: Construção para encaminhamento da prova da relação entre as áreas dos quadriláteros.



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra.

A área do quadrilátero ABCD ($A_{(ABCD)}$) é igual à soma das áreas dos triângulos ABC com CDA. Logo:

$$A_{(ABCD)} = A_{(ABC)} + A_{(CDA)} \qquad (01)$$

$$A_{(ABCD)} = \frac{2ah}{2} + \frac{2ah_1}{2} = \frac{2a(h+h_1)}{2} = a(h+h_1) \qquad (02)$$

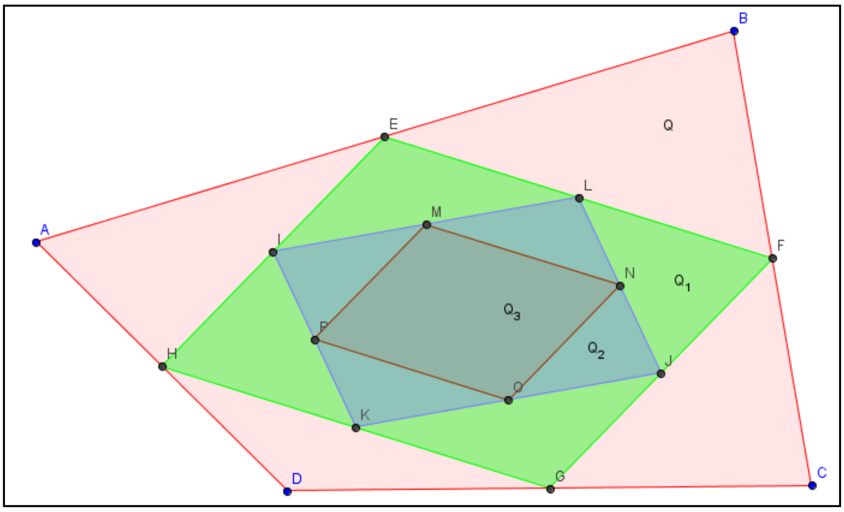
Já a área do quadrilátero EFGH pode ser dada por:

$$A_{(EFGH)} = A_{(EZSF)} + A_{(HZSG)} \qquad (03)$$

$$A_{(EFGH)} = a\frac{h}{2} + a\frac{h_1}{2} = \frac{a(h+h_1)}{2} = \frac{1}{2}A_{(ABCD)} \qquad (04)$$

Ficando assim estabelecida a relação existente entre as áreas desses dois quadriláteros. Portanto, conhecendo esta relação de proporcionalidade, podemos escrever que a área de um quadrilátero qualquer é igual ao dobro da área do paralelogramo formado pelos pontos médios desse quadrilátero. Provado este fato, recorrendo a essa propriedade, podemos estender a relação entre áreas para o caso de recorrência estabelecida ao criarmos outros quadriláteros sobre os pontos médios dos lados do anterior. Digamos que Q seja o quadrilátero original, e que sobre os pontos médios desse quadrilátero, construamos Q1; sobre os pontos médios de Q1, construamos outro quadrilátero Q2; sobre os pontos médios de Q2, construamos Q3; e assim sucessivamente, a Figura 9, a frente, ilustra tal construção.

Figura 9: Ilustração para mais de um quadrilátero construído sobre os pontos médios dos lados.



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra.

Por recorrência a proposição anterior, é fácil perceber que:

$$A_{Q_1} = \frac{1}{2} A_Q \qquad (05)$$

$$A_{Q_2} = \frac{1}{2} A_{Q_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} A_Q = \frac{1}{4} A_Q \qquad (06)$$

$$A_{Q_3} = \frac{1}{2} A_{Q_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{4} A_Q = \frac{1}{8} A_Q \qquad (07)$$

(...)

$$A_{Q_n} = \frac{1}{2^n} A_Q \qquad (08)$$

A nosso ver, essa também pode ser uma atividade investigativa, encaminhada aos alunos, como uma forma de buscar aprofundar os estudos realizados e generalizar o trabalho com a proposição em estudo. Inclusive, relacionando esse elemento geométrico a outros conteúdos da educação básica, a título de exemplo, se nota a sequência:

$\{A_{Q_1}, A_{Q_2}, A_{Q_3} \dots A_{Q_n}\}$ que é uma progressão geométrica (PG). Se perguntarmos o que acontece se somarmos infinitamente os termos dessa sequência, chegaremos a uma soma infinita de termos de uma PG, diga-se de passagem, que será convergente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Cremos que o trabalho apresenta dois elementos importantes a serem refletidos durante os encaminhamentos das aulas de matemática, especialmente ao explorarmos conteúdos geométricos. Primeiramente, a importância dada à forma como olhamos as figuras geométricas, especialmente a necessidade de se fazer uso de um olhar que permita desconstruir as formas presentes nas figuras para utilização de outras propriedades que não estão disponíveis a uma primeira vista, a chamada desconstrução dimensional. Esse olhar se torna essencial no trabalho em geometria, pois a todo momento estamos buscando articular elementos teóricos matemáticos a partir de manipulação figural. Contudo, esse modo de olhar não se estabelece de forma espontânea e natural, e compete a nós professores investirmos em atividades que busquem o desenvolvimento desse olhar em nossos alunos.

O segundo ponto que destacamos diz respeito à forma como apresentamos os enunciados das atividades. Quando esses enunciados são “fechados” demais, direcionados ao que se quer encontrar enquanto propriedade, eles podem deixar de oportunizar aos alunos percorrerem caminhos investigativos que os levem a outras descobertas. Essas descobertas, quando são frutos de um trabalho investigativo, possivelmente podem levar os alunos a estudarem muitos outros elementos matemáticos além dos que a própria propriedade solicita.

Além disso, problemas como esse podem se tornar muito mais significativos para a investigação em sala de aula quando buscam envolver uma situação problema, de preferência procurando envolver contextos práticos e próximos à realidade dos alunos. A título de exemplo, o problema discutido no artigo poderia ser encaminhado a uma classe do ensino fundamental versando: O pai do Felipe comprou um terreno em formato de um quadrilátero (a maioria dos terrenos vendidos nas cidades é neste formato, por curiosidade, o seu também é?), ele teve a ideia de construir sua casa também em formato de um quadrilátero, porém resolveu construí-la de forma especial e um tanto diferente do usual, resolveu construí-la de tal forma que os quatro cantos da casa ficassem sobre os pontos médios dos lados do terreno. A partir dessas informações, o que será que podemos afirmar sobre a casa de Felipe? Qual será o formato de sua casa? Como podemos generalizar essas observações sobre a casa de Felipe?

No exemplo proposto, além do aluno trabalhar com a mesma propriedade discutida, ele a explora em um problema, que o permite elaborar o modelo geométrico para a situação descrita, além de refletir sobre a possibilidade de generalização do que descobriu para o campo da geometria.

Levantados tais elementos, cremos que o trabalho apresentado possa servir para refletirmos acerca dessas necessidades e, assim, elaborarmos (e encaminharmos) estudos e atividades cada vez mais significativas na construção dos conhecimentos matemáticos, possibilitando transpor de um ensino meramente reprodutor para um ensino mais centrado em investigações.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G. DOLCE, O. MACHADO, A. **Matemática e realidade**: 8º ano. 6ª ed. São Paulo. Editora Atual, 2009.

DOLCE, O. POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar 9**: Geometria plana. Ed. Atual, 7. Ed. São Paulo, SP, 1993.

DUVAL, R. **Ver e ensinar Matemática de outra forma, entrar no modo matemático de pensar**: os registros de representações semióticas. Editora PROEM, 1ª Ed. São Paulo, 2011.

DUVAL, R. Rupturas e Omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em Geometria. In BRANDT, C. F. e MORETTI, M. T. (Org.). As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática. Ed. Unijuí, p. 15 – 38. Ijuí, RS, 2014.

DUVAL, R. Les conditions conitives de l'aprentissage de La geometrie: développement de La visualisation, différenciation dês raisonnements et coordination de leus fonctionnements. **Annales de Didactique e de Sciences Cognitives,** nº 10 p. 5 a 53, 2005.

SOUZA, R. N. S.; MORETTI, M. T.; ALMOULOUD, S. A. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas. **Educação Matemática Pesquisa.** v. 21, n. 1, p. 322 – 346. 2019.

TREVISAN, E. P. **Um estudo sobre a Articulação entre validações empíricas e teóricas no ensino de Geometria com professores da rede pública**. 2016. 257 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso, 2016.

TREVISAN, E. P. O Caso Especial de Congruência de Triângulos Retângulos: explorando possibilidades. **CoInspiração - Revista Dos Professores Que Ensinam Matemática**, V.2, nº 2, p. 1 – 14, 2019.

TREVISAN, E. P.; FREITAS, J. L. M. A relação entre o discurso dedutivo e argumentativo na construção de provas empíricas e teóricas por um grupo de professores de matemática. **Revista de Educação Ciências e Matemática.** V9, n. 3, São Paulo, 2019.

Histórico
Submetido: 07 de outubro de 2021.
Aprovado: 15 de novembro de 2021.
Publicado: 05 de dezembro de 2021.

Como citar o artigo - ABNT
TREVISAN, E. P. O que podemos afirmar sobre o quadrilátero formado pelos pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer? Em destaque, a relação entre as áreas. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática** (MT), e2021008, 2021.
https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172.e2021008