COINSPIRAÇÃO
Revista dos Professores que Ensinam Matemática

Uma proposta teórica para o ensino de razão e proporção na educação básica

Rubens Vilhena Fonseca[1]
Universidade do Estado do Pará (UEPA)

Fabio Brito de Castro[2]
Universidade do Estado do Pará (UEPA)

Marcos Vinicius Trindade Vieira[3]
Universidade do Estado do Pará (UEPA)

Charles Bolzanell Bosi[4]
Universidade do Estado do Pará (UEPA)

RESUMO

Este artigo objetiva descrever uma proposta teórica para o ensino de razão e proporção no 6º ano do ensino fundamental. Ela surge a partir de trabalhos desenvolvidos no Grupo de Estudos em Aritmética e Álgebra da Universidade do Estado do Pará, e suas etapas seguem um caminho de aprendizagem que começa revisitando a multiplicação como adição repetida; explorando padrões na tabela de multiplicação; e avançando para o conceito de taxa como uma única coluna "fora da tabela de multiplicação". Também se discute a razão como duas colunas de taxa vinculadas, ou uma tabela de razão, bem como o olhar para duas linhas de uma tabela de razão, ou um quadrado de proporção. Como introdução ao assunto, a proposta se concentrou em situações em que o ponto de interrogação em a:b = c? é um número inteiro, visando promover o raciocínio multiplicativo em um ambiente numérico apropriado ao desenvolvimento dos estudantes.
Palavras-chave: Ensino-aprendizagem; Razão; Proporção.

A theoretical proposal for teaching ratio and proportion

ABSTRACT

This article aims to describe a theoretical proposal for teaching ratio and proportion in the 6th year of elementary school. It arises from work developed in the Study Group in Arithmetic and Algebra at the State University of Pará, and its stages follow a learning path that begins by revisiting multiplication as repeated addition; exploring patterns in the multiplication table; and advancing to the concept of rate as a single column "outside the multiplication table". Ratio as two linked rate columns, or a ratio table, is also discussed, as well as looking at two

[1] Doutor em Educação Matemática (PUC-SP). Docente do Curso de Licenciatura em Matemática (UEPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua do Una, n.º 156, Telégrafo, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66050-540. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8899-2945?lang=pt .
Lattes: http://lattes.cnpq.br/1016845076658445. E-mail: rubens.vilhena@gmail.com

[2] Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPA, Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua do Una, n.º 156, Telégrafo, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66050-540. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3651-0606
Lattes : http://lattes.cnpq.br/2575887489163661. E-mail: fabio.castro@aluno.uepa.br.

[3] Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPA, Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua do Una, n.º 156, Telégrafo, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66050-540. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1668-2283
Lattes: http://lattes.cnpq.br/6374869372310490. E-mail: marcos.vvieira@aluno.uepa.br

[4] Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPA, Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua do Una, n.º 156, Telégrafo, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66050-540. ORCID: http://orcid.org/0009-0007-9397-622X.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/2041301405225847. E-mail: charles.bbosi@aluno.uepa.br.

rows of a ratio table, or a ratio square. As an introduction to the subject, the proposal focused on situations where the question mark in a:b = c? is an integer, to promote multiplicative reasoning in a numerical environment appropriate to the development of students.

Keywords: Teaching-learning; Reason; Proportion.

Una propuesta teórica para la enseñanza de la razón y la proporción

RESUMEN

Este artículo objetiva describir una propuesta teórica para la enseñanza de la razón y la proporción en el 6º año de la escuela primaria. Surge del trabajo desarrollado en el Grupo de Estudios en Aritmética y Álgebra de la Universidad Estadual de Pará, y sus etapas siguen un camino de aprendizaje que comienza con la revisión de la multiplicación como suma repetida; explorar patrones en la tabla de multiplicar; y avanzando al concepto de tasa como una sola columna “fuera de la tabla de multiplicar”. También se analiza la razón como dos columnas de tasas vinculadas, o una tabla de razones, además de observar dos filas de una tabla de razones o un cuadrado de razones. Como introducción al tema, la propuesta se centró en situaciones donde el signo de interrogación en a:b = c? es un número entero, para promover el razonamiento multiplicativo en un entorno numérico adecuado al desarrollo de los alumnos.

Palabras llave: Enseñanza-aprendizaje; Razón; Proporción.

INTRODUÇÃO

Problemas que envolvem o conteúdo de razão e proporção devem ser explorados com o intuito de promover a aprendizagem desses conceitos por meio de situações-problemas ligadas à cultura e ao cotidiano dos estudantes, visto que as escolas apresentam realidades distintas, sejam elas localizadas nos grandes centros ou as periféricas e/ou interioranas. Tal atribuição desperta a necessidade e o interesse em explorar técnicas de resolução eficazes que possam ser usadas no dia a dia.

Posto isto, a produção deste trabalho começa com as ideias simples de adição e multiplicação. Esta introdução conecta fortemente as ideias mais complexas de razão e proporção aos conceitos e às operações matemáticas – habilidades que os alunos do ensino fundamental já deveriam conhecer e/ou desenvolver. Ao longo do processo de aprendizagem, os estudantes devem ser incentivados a recorrer e discutir seu conhecimento intuitivo pessoal, bem como seu conhecimento matemático, associando experiências de trabalho real e formatos matemáticos.

Nesta perspectiva, o objetivo é fundamentar os conceitos de razão e proporção dos alunos de forma recíproca em suas interpretações de experiências de trabalho real (situações de história) e representações matemáticas simbólicas (tabelas, números e notação). A interpretação recíproca de situações e representações promove ferramentas conceituais robustas para lidar e resolver problemas de razão e proporção, sejam eles puramente numéricos ou no contexto de problemas discursivos (TIMSS, 1995).

Com isso em mente, este artigo tem por finalidade descrever uma proposta teórica para o ensino de razão e proporção para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Esta proposta surgiu a partir de trabalhos desenvolvidos no Grupo de Estudos em Aritmética e Álgebra (GEAA) da Universidade do Estado do Pará (UEPA), credenciado pelo CNPq, e suas etapas seguem um caminho de aprendizagem que começa revisitando a multiplicação como adição repetida; explorando padrões na tabela de multiplicação; e avançando para o conceito de taxa como uma única coluna “fora da tabela de multiplicação”.

Antes de apresentar a proposta, o estudo considerará brevemente como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), de 1998, e as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de 2017, respaldam a ideia de que o ensino, neste caso da Matemática, deve levar em conta a cultura, as regionalidades e as aplicações cotidianas do conhecimento apreendido pelos alunos.

REFERENCIAL TEÓRICO

PCNs, BNCC e o ensino de razão e proporção

Há décadas, o Brasil apresenta legislações que regem os aspectos educacionais diretamente relacionados à sala de aula, seja no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) – documento normativo que estabelece diretrizes para orientar a educação brasileira – possui aspectos que coincidem com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1998).

A correlação das ideias, dessas legislações, pode ser observada nos Quadros 5 e 6 do estudo de Kuhn e Lima (2021). Segundo os autores, enquanto os PCNs têm a preocupação de apresentar linhas norteadoras para o ensino fundamental, servindo de base para estados e municípios elaborarem e implementarem propostas educativas regionalizadas nas escolas, a BNCC esclarece que “[...] as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências” (BRASIL, 2017, p. 13).

Sobre o conteúdo de razão e proporção, um aspecto é interessante nos PCNs: tal conteúdo estabelece conexões com outros de Matemática. Segundo os PCNs,

> É importante que os alunos percebam essas conexões. A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais - os contraexemplos. [...] O aluno poderá desenvolver essa noção ao

> analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (função afim ou quadrática). Essas situações são oportunas para que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica, representando-a no plano cartesiano (BRASIL, 1998, p. 84).

Por outro lado, a BNCC assegura o desenvolvimento das competências, definidas como "[...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2017, p. 13). Isso mostra que há duas preocupações quanto ao desenvolvimento dos alunos: uma diz respeito ao saber teórico, "[...] considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores", enquanto a outra diz respeito ao saber fazer, "[...] considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2017, p. 13).

Deste modo, o saber teórico e o saber fazer devem estar presentes concomitantemente nas aulas do ensino básico, especialmente nas aulas de Matemática. Assim, com a articulação entre os conceitos de equivalência e proporcionalidade, o aluno poderá conectar o conteúdo de razão e proporção aos problemas práticos do cotidiano, apropriando-se de fórmulas matemáticas, em particular da regra de três. Além de saberem, na teoria, o significado das manipulações matemáticas, destaca-se a necessidade de também compreenderem como aplicá-las no dia a dia, ou seja, usar efetivamente o que aprenderam, sabendo soluções mais fáceis e rápidas, facilitando suas ações no cotidiano.

A BNCC organiza as habilidades em códigos alfanuméricos que identificam as temáticas a serem trabalhadas em sala de aula. Para o conteúdo de razão e proporção, no 6° ano, é estabelecido o desenvolvimento das seguintes habilidades: "(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo" (BRASIL, 2017, p. 303). Deste modo, de forma simplificada, o professor fica ciente do que será abordado durante a aula, sem que se perca o foco do ensino.

Pensando no âmbito das aplicações matemáticas no cotidiano e considerando os regionalismos, como propõe os PCNs, pode-se tomar como exemplo a cultura da cidade de Belém do Pará, onde há a possibilidade de explorar a seguinte situação-problema: Um rapaz tem o hábito de comprar 100 gramas de farinha de mandioca para adicionar em meio litro de açaí. Em um domingo, ele resolveu reunir a família para um almoço. Com isso, para acompanhar o tambaqui[5] assado, ele comprou 3 litros de açaí, mas não sabia quanto comprar de farinha de mandioca. A partir dos conceitos e técnicas demonstradas nos ensinamentos de razão e proporção, o rapaz concluiria ser preciso comprar 600 gramas de farinha.

Outro aspecto que a BNCC faz referência diz respeito à educação integral do aluno, ou seja, nenhuma educação é voltada apenas para o intelectual, nem apenas para o afetivo, mas ela deve compreender ambos os aspectos, já que

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades (BRASIL, 2017, p. 14).

A vista disso, a educação integral surge com o objetivo de superar as dificuldades ocasionadas pela fragmentação do currículo escolar; as disciplinas antes isoladas se unem para desenvolver o ser humano completamente, não somente relacionados a uma lógica matemática e conteudista. Todavia, a educação integral não se refere apenas ao aumento da jornada escolar, mas sim ao aprendizado socioeducativo. Portanto, "O processo educativo, nesse caso, tem mais sentido e significado para o aluno, fortalecendo identidades, aprofundando relações humana [...]" (GADOTTI, 2009).

METODOLOGIA

Esta abordagem foi originalmente desenvolvida por uma equipe de pesquisa universitária e foi embasada pela literatura sobre cognição e educação matemática (VERGNAUD, 1983). A abordagem contou com a colaboração de um pesquisador, de professoras de escolas públicas e de bolsistas do programa de Residência Pedagógica da Universidade do Estado do Pará (UEPA). A proposta também recorreu a informações retiradas de estudos anteriores, como de Lazzaretti (2022).

A proposta era para ser aplicada em uma turma do 6° ano do ensino fundamental. Após sua implementação, ocorreriam as discussões com os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, membros do grupo de pesquisa, que indicariam se os estudantes conseguiram

[5] Peixe característico da região Norte, Mato Grosso, Goiás, São Paulo, Minas Gerais e Paraná.

resolver problemas de proporção e razão de forma significativa. Infelizmente, situações decorrentes da pandemia de covid-19 não permitiram a realização, em sala, da proposta aqui apresenta.

Em acréscimo, a proposta teórica evoluiu das leituras de trabalhos na área de educação matemática e dos relatos desses estudos sobre a utilização do raciocínio aditivo incorreto nos problemas de razão e proporção (CONFREY, 1995). Esse erro de raciocínio leva a suposições equivocadas; por exemplo, "A razão 3:5 = 6:8 porque 3 + 2 = 5 e 6 + 2 = 8". Nesta proposta, buscou-se vincular situações de razão e proporção no contexto de análise da tabela de multiplicação para promover um correto raciocínio multiplicativo dos alunos.

Inicialmente, os estudantes precisariam focar em situações de adição repetida para preencher tabelas de proporção e desenvolver uma compreensão da tabela de multiplicação; em seguida, o professor deveria incentivar estratégias de solução multiplicativa para resolver questões discursivas envolvendo razão e proporção. A princípio, esta proposta apresenta uma visão geral da situação matemática, e, em seguida, a análise dos possíveis resultados numa sala de aula do 6º ano.

As tabelas utilizadas nesta proposta são as que podem ser apresentadas a uma turma: a Tabela de Multiplicação (TM), a tabela de taxa[6], a Tabela de Razão (TR) e o Quadrado da Proporção (QP). Os parágrafos a seguir destacam como introduzir e discutir cada tabela com os alunos, usando situações de proporção para formar uma compreensão coerente e integrada.

Apresentação da proposta

Apresenta-se a sequência de etapas para a solução de situações matemáticas similares ao seguinte: *Todos os dias, Tico e Tina economizam cada um em uma taxa constante. Se, em um determinado dia, Tico tem $6 e Tina tem $10, quanto Tina terá quando Tico tiver $21?*

- Etapa 1 – Tabela de Multiplicação (TM).

Figura 1 – Tabela de Multiplicação

[6] A utilização do termo "taxa", para a turma do 6° ano, dependerá da abordagem inicial que o professor terá com a turma. Em casos em que o docente já conheça a turma e tenha sido explicado o significado do termo "taxa", não haverá problemas para o prosseguimento da proposta. De modo contrário, o professor pode trocar o termo "taxa" pelo termo "número" para exemplificar os valores adicionados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

- Etapa 2 – Taxa como coluna única da TM.

Outra situação matemática: *Todos os dias, Tico coloca $3 no seu cofrinho de gato.*

Figura 2 – Tabela de Razão

1	3
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18
7	21
8	24
9	27
10	30

Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

- Etapa 3 – TR como duas colunas de taxa simultâneas.

Agora, considere mais essa situação: *Todos os dias, Tico coloca $3 no seu cofrinho de gato, e Tina coloca $5 no seu cofrinho de cachorro.*

Figura 3 – Tabela de Razão (TR)

Dia	3 : 5	
0	0	0
1	3	5
2	6	10
3	9	15
4	12	20
5	15	25
6	18	30
7	21	35
8	24	40
9	27	45
10	30	50

Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

- Etapa 4 – Quadrado de Proporção (QP) selecionado como RT linhas (linhas 2 e 7).

Figura 4 – As 4 etapas

	Tico	Tina	
	3	5	
2	6	10	2
7	21	35	7
	3	5	

QP fatorado externamente. QP como uma "mini" TM
Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

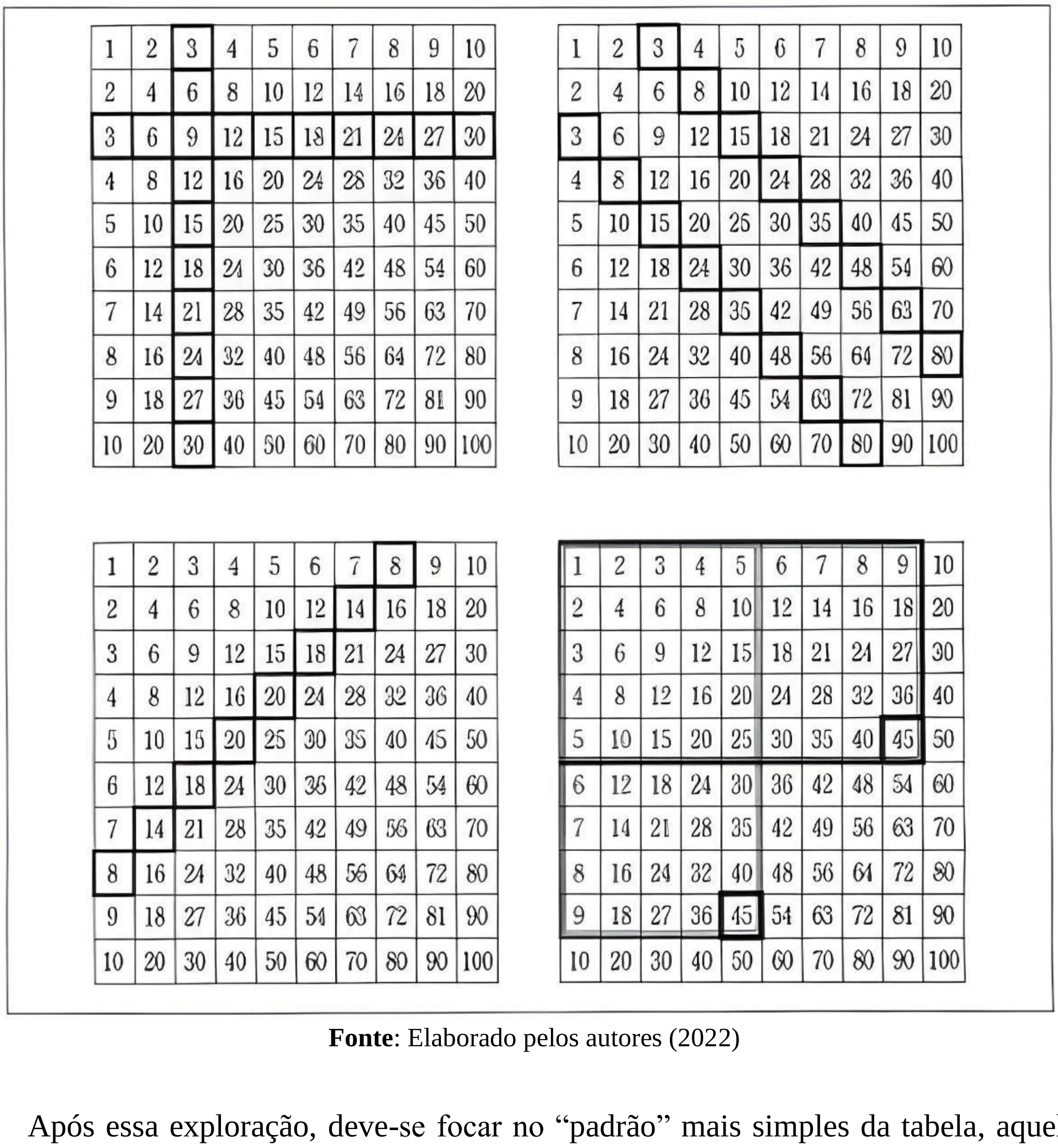
Essas são as etapas da estrutura projetada para conceituar razão e proporção. Produtos e células de um problema de exemplo específico são realçados aqui para ilustração.

ANÁLISES E RESULTADOS

Explorando padrões na tabela de multiplicação

Seria importante começar pedindo aos alunos para "[...] encontrar padrões interessantes ou fatos na tabela de multiplicação" (STIGLER; LEE; STEVENSON, 1990). Os alunos podem descobrir padrões que eles nunca tinham visto antes e destacá-los. A tabela de multiplicação é rica em padrões de repetição de linhas e colunas ou diagonais, onde conjuntos de números se repetem, mas mudam de posição na tabela (veja a Figura 5, abaixo). A versão mais simples desse padrão são as linhas e colunas "gêmeas"; por exemplo, a linha 3 (3, 6, 9, ..., 30) tem uma "gêmea" na coluna 3 (3, 6, 30). É possível os alunos encontrarem muitos outros padrões, alguns dos quais são menos óbvios, como a simetria da tabela em relação à diagonal de quadrados (1, 4, 9, ..., 100). Outros padrões utilizam retângulos formados por células, onde a célula 1 é o canto superior esquerdo e qualquer outra célula, como 45, é o canto inferior direito. O número no canto inferior direito indica quantas células estão dentro do retângulo; esta é uma oportunidade para a discussão sobre áreas de retângulos (VANHILLE; BAROODY, 2002).

Figura 5 – Exemplos de padrões espaciais-numéricos na tabela de multiplicação



Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

Após essa exploração, deve-se focar no "padrão" mais simples da tabela, aquele que esperamos que todos os alunos conheçam, mas que provavelmente muitos não o entendam bem

(EVANGELISTA; GUIMARÃES, 2019). Em cada linha ou coluna da tabela de multiplicação, a primeira célula dita o valor "contado por" usado na contagem pulando, por exemplo, na coluna do 3, contamos de três em três. Não deve ser difícil conseguir reproduzir facilmente a coluna do 3, recitando e escrevendo a contagem pulando de três em três, mas se for solicitado que se desmembre a contagem, pulando em uma sequência de operações de adição separadas, é possível haver confusão com o número adicionado e o total acumulado (total parcial). Essa confusão impede a consolidação do entendimento de que a multiplicação é uma adição repetida. Uma solução didática é fazer com que se interprete a coluna do 3 como uma narrativa de taxa situada.

Ver uma coluna como uma situação de taxa

Para ajudar os alunos a entenderem a multiplicação como uma adição repetida, pode-se apresentar a eles o seguinte problema: *O cofrinho de gatinho do Tico está vazio. A partir de hoje Tico colocará $3 por dia em seu cofrinho. No sétimo dia, quanto ele terá em seu cofrinho de gatinho?*

A decisão de Tico de economizar $3 por dia é um exemplo de uma situação do mundo real, em que uma quantidade começa em 0 e depois acumula por um aumento constante ligado a uma unidade fixa de tempo[7]. Situações como a do problema podem ser pensadas como situações de taxa com um total acumulado, e o processo de acumulação, ao longo do tempo, pode ser representado por uma coluna na tabela de multiplicação, como 3, 6, 9 e assim por diante, como mostrado nas Figuras 1 a 5.

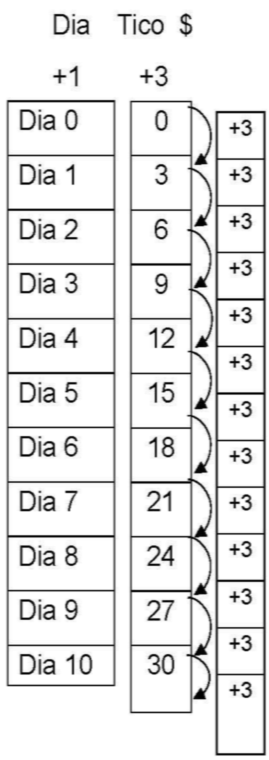
Os números nessa coluna, interpretados como um total acumulado, podem representar acumulações em outras situações de taxa, como um esquilo coletando 3 nozes por semana, uma planta crescendo a partir do zero ou do nível do solo a uma taxa de 3 centímetros por mês, uma barba crescendo, descendo de um queixo à taxa de 3 polegadas por ano, uma pessoa correndo em uma pista a partir de uma linha de partida à taxa de 1063 jardas por segundo, e assim por diante. Deve-se usar uma linguagem contextualizada aos alunos para relacionar a contagem de saltos às situações. Isto se refere ao incremento constante da situação de taxa como o "número de adição" ou "número crescente", e cada um dos valores sucessivos como o "total", a soma após cada incremento.

[7] Note que em um trabalho em sala, ocasionalmente pode-se adicionar um 0 às tabelas de multiplicação para vinculá-las aos inícios das situações, embora na maioria das vezes seja preferível não desviar do formato padrão da tabela de multiplicação, que não tem um 0. Assim, evita-se a questão confusa da divisão por 0.

Apesar da aparente simplicidade de interpretar a tabela de taxas como uma situação de incremento constante, pode haver confusão entre o aumento constante e o total acumulado, ou equívoco entre o "número crescente" ou "o que você coloca", ou seja, +3, +3, +3 e "o que você obtém"; ou seja, 3, 6, 9,... Por exemplo, ao tentar interpretar a coluna de 3 em relação à história do Tico, pode-se concluir: "No primeiro dia, Tico colocou $3 e, no segundo dia, colocou $6". Compreender essa distinção é crucial para fazer a transição com segurança da adição para a ideia de multiplicação como adição repetida. Situações simples de taxa podem fornecer um contexto intermediário para entender a noção de adição por um valor constante.

Utilizando outras histórias de taxa, até que se possa preencher uma tabela de taxa situada, pode-se inicialmente escrever as operações de incremento (como mostrado nos marcadores repetidos de +3 no diagrama da Figura 6), e, posteriormente, omitir essas notações e deixá-las implícitas no contexto da taxa, ajuda a fornecer suporte às habilidades dos alunos para interpretar e preencher a coluna em termos da história de taxa.

Figura 6 – Diagrama da tabela de taxa situada



Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

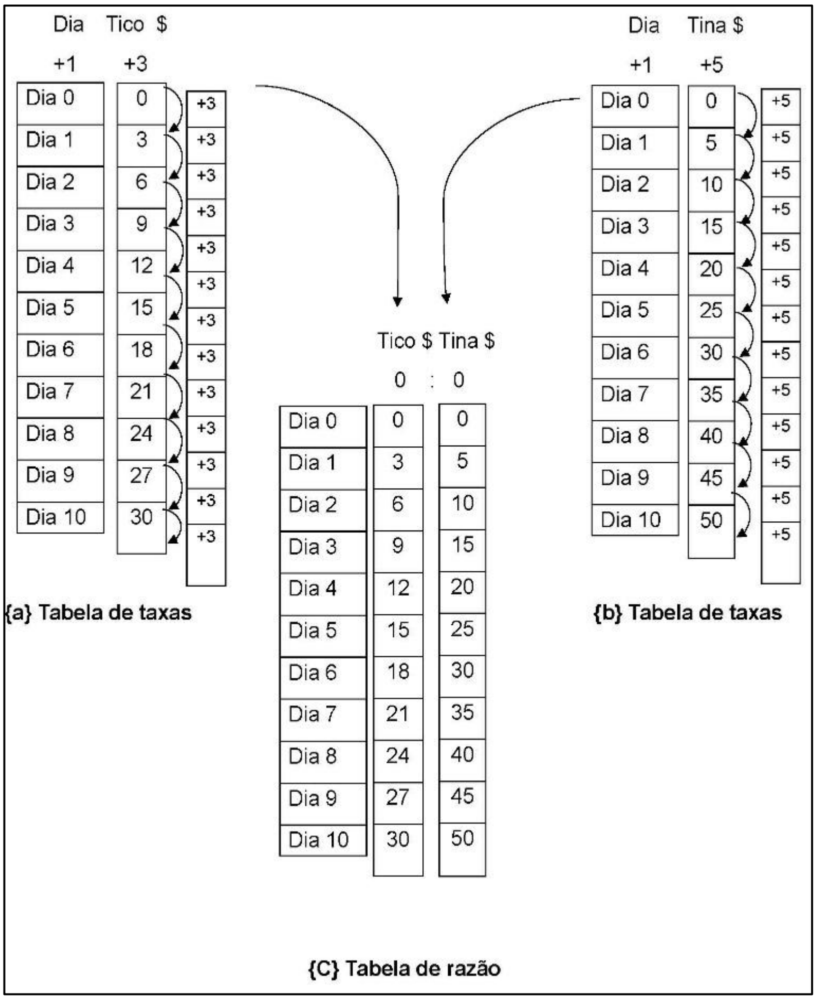
O próximo passo é passar de uma compreensão aditiva para uma compreensão multiplicativa das situações e da tabela de multiplicação. Os números na coluna 1 aumentam paralelamente aos números em qualquer outra coluna: em outras palavras, eles contam usando pulos de 1 e indicam quantas quantidades de $3 Tico acumulou, ou quantas adições de 3 fizeram na coluna 3. Nesse sentido, os números na coluna 1 são os multiplicadores de 3, e cada um deles indica um número na coluna 3, seu múltiplo de 3, na linha correspondente. Por exemplo, pode-se pensar no número 6 na coluna 1 como indicando 18, seu múltiplo de 3 na linha correspondente da coluna 3. Assim, conclui-se que “Precisa-se de seis adições de 3 para chegar a 18”.

Para os fatores, é preciso se concentrar no número crescente no topo da coluna, como 3, como em $3 por dia 1, e no multiplicador na coluna à esquerda, como 6, como no dia 6 para o produto; assim concentra-se na quantidade total acumulada, ou seja, 3 x 6 = 18. A prática dessa interpretação multiplicativa da tabela de taxa se obtém resolvendo tabelas de taxa parcialmente preenchidas. Podem-se reconstruir tabelas com um número superior ausente (o incremento constante) dividindo um produto (por exemplo, 21) pelo fator do dia (7). Compreender essas situações, de acumulação e tabelas de taxa como colunas da tabela de multiplicação, é essencial.

Razão: duas situações de taxa relacionadas

Em situações problemáticas, ligam-se duas taxas unitárias em uma única razão. Isto é, pensamos em $3 por 1 dia e $5 por 1 dia como “avançando no tempo juntos” para se tornarem $3 por $5. Representa-se essa conexão como duas tabelas de taxa ligadas, que se tornam uma única tabela de razão (veja a Figura 7, abaixo). O seguinte problema ilustra esse tipo de situação: *Todos os dias, Tico coloca $3 em seu cofrinho de gato, e Tina coloca $5 em seu cofrinho de cachorro. Quando Tico tiver $21 em seu cofrinho de gato, quanto Tina terá em seu cofrinho de cachorro?*

Figura 7 – Uma razão ilustrada como duas taxas “avançando em sincronia”



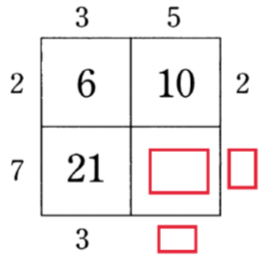
Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

O desafio conceitual, ao entender a razão, é que, embora os aumentos em cada coluna sejam constantes (3 e 5 neste caso), a diferença entre os dois totais em cada incremento, ou dia, não é constante. Por exemplo, compare 3:5, que tem uma diferença de 2, e 6:10, com uma diferença de 4. Um equívoco de "mesma diferença" demonstra o que já foi mencionado como *raciocínio aditivo*. Esse equívoco é tão comum que um bom método de verificar o entendimento dos alunos em relação à razão e proporção é avaliar se eles continuam confusos a respeito desse problema.

Agora considere a sentença: *Tico e Tina começam a economizar dinheiro no mesmo dia. Cada criança economiza a mesma quantia todos os dias, mas os valores são diferentes para cada criança. Depois de alguns dias, Tico tem $6 e Tina tem $10. Em um dia posterior, Tico tem $21. Quanto Tina tem?*

Figura 8 – Formato de solução do quadrado da proporção para problemas descritos, envolvendo razão e proporção, e razão com um valor ausente, proveniente da multiplicação

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	**6**	8	**10**	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	**21**	28	**35**	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100



Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

Vale destacar que tipos mais eficazes de demonstrações são experiências visuais e físicas. Por exemplo, para representar o crescimento de duas flores em diferentes velocidades, pode-se solicitar aos alunos que coloquem as mãos planas em suas mesas e depois as levantem simultaneamente: a mão esquerda, 2 centímetros, e a mão direita, 3 centímetros. Se um aluno levantasse as mãos com uma distância fixa entre elas, foi desafiado que ele as "encolhesse" em direção à mesa. Quando a mão inferior do aluno chegasse à mesa e a outra mão ainda estivesse no ar, deve-se indagar como aquela situação poderia ser possível, considerando que ele tinha iniciado a demonstração com as duas mãos sobre a mesa. Outros exemplos podem incluir a simulação de uma competição de corrida em câmera lenta, com alguém correndo a uma taxa de 2 metros por segundo contra outro cuja taxa seria de 3 metros por segundo. Os alunos ficariam intrigados e encantados ao perceberem que a distância entre os "corredores" aumentava de segundo a segundo. Seriam surpreendidos como este tipo de demonstração é essencial para eles adquirirem um sentido numérico para razão e proporção.

Muito interessante é criar ilustrações para as histórias de proporção, e expô-las em um cartaz, a fim de motivar os alunos, como o crescimento das plantas ou a competição de corrida, por exemplo. Os alunos podem se referir a esse tipo de cartaz para compreender (ou "situar") problemas numéricos ou discursivos. Esses contextos significativos auxiliam na compreensão do quadrado de proporção, que corresponde a apenas duas linhas de uma tabela de razão.

Usando quadrados de proporção para resolver questões de proporção de maneira significativa

Os quadrados de proporção podem ser introduzidos usando o seguinte problema*: Tico e Tina começam a economizar dinheiro no mesmo dia. Cada criança economiza a mesma quantia todos os dias, mas as quantias são diferentes para cada criança. Após alguns dias, Tico tem $6 e Tina tem $10. Em um dia posterior, Tico tem $21. Quanto Tina tem?*

Um quadrado de proporção captura dois intervalos de tempo (duas linhas) em uma tabela de proporção, como o dia 2 e o dia 7 na história de proporção de Tico e Tina (veja Figuras 1 e 5). Para resolver um quadrado de proporção com valor ausente de forma aditiva, seria necessário reconstruir toda a tabela de proporção e usar os aumentos constantes em cada coluna. Essa tarefa consome tempo. Uma tarefa muito mais fácil é focar apenas nos valores do problema no quadrado de proporção e interpretar esses valores no contexto da tabela de proporção completa ou tabela de multiplicação. Assim, à medida que os alunos tentem explicar suas soluções para uma situação como esta, é provável recorrerem a uma grande tabela de multiplicação para vincular os aumentos aditivos na tabela de proporção e a tabela de multiplicação às suas soluções do quadrado de proporção.

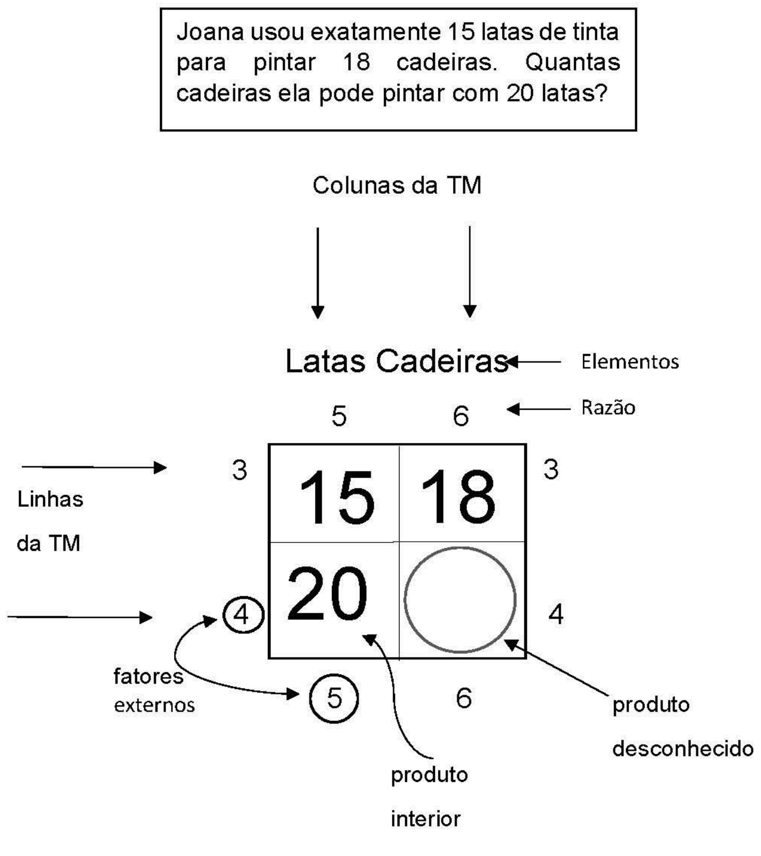
É claro que nem sempre se pode contar com uma tabela de multiplicação por perto sempre que se resolve um problema de proporção. Também é necessário um método que permita generalizar essa técnica para frações, números muito grandes ou álgebra. No entanto, não é preciso recorrer à tabela de multiplicação visualmente, apenas mentalmente.

Agora pense na seguinte situação: *Joana usou exatamente 15 latas de tinta para pintar 18 cadeiras. Quantas cadeiras ela pode pintar com 20 latas?*

Pode-se usar a Figura 9 para uma explicação sobre a construção do quadrado proporção ou, ainda melhor, utilizar papel e lápis, seguindo o processo por conta própria. Inicia-se criando uma tabela 2x2 e nomeando conforme as quantidades variáveis no problema. Ao empregar esse processo, deve-se orientar a nomear as colunas e as linhas segundo a situação específica descrita no problema, como “Latas” para a coluna da esquerda e “Cadeiras” para a coluna da direita, para evitar a entrada incorreta de dados do problema ou interpretação incorreta da solução. Essa etapa também oferece uma boa oportunidade para preparar os alunos para o trabalho com conjuntos de dados no Ensino Médio, onde eles serão obrigados a criar e gerenciar gráficos complexos. Após nomear as duas colunas, é necessário manter essa ordem tanto nas linhas superiores quanto nas linhas inferiores do quadrado de proporção.

Em seguida, inserem-se os três valores fornecidos no problema; neste exemplo, 15 latas e 18 cadeiras na linha superior e 20 latas na linha inferior. Assim, tem-se um quadrado de proporção em que a linha superior possui dois valores conhecidos e a linha inferior possui um valor conhecido e um valor desconhecido. Pensar no quadrado de proporção como uma tabela de multiplicação abreviada, com fatores e produtos, encontrar o valor desconhecido é o mesmo que perguntar: "*Qual é a linha e qual é a coluna desse valor desconhecido?*". Essa analogia é válida porque a linha e a coluna, por exemplo, 4 e 6, respectivamente, são os fatores do produto desconhecido. O processo de resolução numérica agora se torna um quebra-cabeça que os alunos acham acessível, e até mesmo agradável de resolver, porque eles podem ver o quebra-cabeça como quatro células da tabela de multiplicação, o que permite vários métodos de solução.

Figura 9 – A estratégia de solução do quadrado de proporção para questões de razão e proporção



Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

Para descobrir quais linhas e colunas da tabela de multiplicação o quadrado de proporção está usando, observe qualquer linha ou coluna no quadrado de proporção que tenha dois números e pense em qual linha ou coluna na tabela de multiplicação em que ela pode estar. Quando se encontra o número da linha ou o número da coluna, 3 como o número da linha superior, ou 5 como o número da coluna da esquerda, se escreve em ambos os lados do quarteto de proporção. Conforme o quebra-cabeça do quarteto de proporção é resolvido, ao continuar esse processo, cada quadrado pequeno terá seus fatores, ou seja, suas linhas e colunas na tabela de multiplicação, do lado de fora (veja a Figura 9, acima). Eventualmente, se consegue encontrar os dois fatores do produto desconhecido e os multiplicar para obter o produto final. A solução é concluída escrevendo uma resposta como “Com 20 latas, Joana pode pintar 24 cadeiras”.

A partir dos resultados apresentados, pôde-se inferir que a maioria dos alunos, no momento propício, irão articular seus métodos de solução e seus critérios para interpretar problemas específicos como situações de proporção e razão, além de escolher estratégias de solução de acordo. Por exemplo, os alunos podem rejeitar uma situação como exemplo de um problema de proporção e razão se não puderem assumir, com confiança e com base nas informações fornecidas, que cada uma das duas taxas de mudança descritas seja constante, que essas taxas comecem simultaneamente e estejam ligadas por uma unidade de tempo comum. Um exemplo de problema que os alunos podem rejeitar como uma situação de proporção e razão é a seguinte: *Bruno e José são irmãos que nasceram exatamente com dois anos de diferença. Quando Bruno tinha 3 anos, José tinha 5. Quando Bruno tinha 6 anos, quantos anos José tinha?*

A busca dos alunos para articular sua compreensão pode levar a discussões em sala de aula fascinantes e não previstas sobre diferentes tipos de situações de proporção e sua capacidade preditiva. Por exemplo, o fato de que Joana precisa de 5 latas de tinta para cada 6 cadeiras é uma regra fixa, mas se Gabi geralmente acerta 5 de cada 6 arremessos de basquete, não se pode ter certeza absoluta de que ela fará o mesmo no próximo jogo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve por objetivo descrever uma proposta teórica para o ensino de razão e proporção para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. A aplicação da proposta pode demonstrar que o quadrado de proporção é uma estratégia bem acessível para alunos desse segmento. Pôde-se perceber que não apenas o quadrado de proporção é uma possibilidade de formato eficaz de solução para problemas de proporção e razão, mas também pode promover ampla prática de multiplicação e divisão de uma maneira envolvente.

Os conceitos de frações equivalentes (por exemplo, 3/4 = 6/8) e porcentagem (por exemplo, 3/4 = 75%) podem ser facilmente introduzidos ou revisados ao trabalhar com a tabela de multiplicação e quadrados de proporção. O quadrado de proporção é um formato promissor para apoiar a descoberta da multiplicação cruzada; ao escrever-se um quadrado de proporção com suas linhas e colunas dentro dos quadrados em vez de fora deles, os estudantes podem ver que a diagonal esquerda e a diagonal direita contêm os mesmos quatro números. Finalmente, embora o que foi apresentado seja independente, as amplas aplicações do quadrado de proporções em todos os domínios dos números racionais permitem que esse assunto seja facilmente integrado a uma unidade sobre frações. A tabela de multiplicação pode ser usada para expandir e reduzir frações.

Em pesquisas posteriores, e nas aplicações em sala de aula, a expansão da tabela de multiplicação para decimais e frações entre os números inteiros poderá apoiar soluções significativas para problemas de proporção e razão com números não inteiros.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf. Acesso em: 30 jul. 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base. Acesso em: 30 jul. 2022.

CONFREY, J. Student voice in examining “splitting” as an approach to ratio, proportions and fractions. *In:* MEIRA, S. L.; CARRAHER; David (eds.). **Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Recife: UFPE, 1995. 1. v. p. 3-29.

EVANGELISTA, B; GUIMARÃES, G. Análise de atividades sobre tabelas em livros didáticos brasileiros dos anos iniciais do ensino fundamental. *In*: CONTRERAS, J. M. *et al.* (eds.). **Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística**. Granada: [*s. n.*], 2019. p. 1-9. Disponível em: https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/evangelista.pdf. Acesso em: 22 jul. 2022.

GADOTTI, M. **Educação integral no Brasil**: inovações em processo. São Paulo: Instituto Paulo Freire, 2009.

KUNHN, M. C.; LIMA, E. Álgebra nos anos finais do ensino fundamental: reflexões a partir dos PCN e da BNCC para construção do pensamento algébrico significativo. **REnCiMa**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 1-23, abr./jun. 2021.

LAZZARETTI, R. **Uma análise do conteúdo de razão e proporção em livros didáticos do ensino fundamental**. 2022. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2022.

STIGLER, J. W.; LEE, S.-Y.; STEVENSON, H. W. **Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children**. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.

TIMSS 1995. Study Instruments and Procedures. Boston College: The Third International Mathematics and Science Study, 1995. Disponível em: https://timss.bc.edu/timss1995i/t95_study.html. Acesso em: 21 jul. 2022.

VANHILLE, L. S.; BAROODY, A. J. Fraction Instruction That Fosters Multiplicative Reasoning. *In*: LITWILLER, B. H. (ed.). **Making sense of fractions, ratios, and proportions, 2002 yearbook of the national council of teachers of mathematics**. Reston, Va: NCTM, 2002. p. 224-236.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (eds.). **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 127-174.

Histórico
Submetido: 30 de julho de 2022.
Aprovado: 10 de setembro de 2022.
Publicado: 02 de outubro de 2022.

Como citar o artigo - ABNT
FONSECA, R. V.; CASTRO, F. B.; VIEIRA, M. V. T.; BOSI, C. B. Uma proposta teórica para o ensino de razão e proporção na educação básica. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática** (MT), e2022005, 2022. https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172.e2022005